

Matematika III – 5. přednáška

Funkce více proměnných: Implicitně definované funkce

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16. 10. 2013

Obsah přednášky

- 1 Zobrazení mezi euklidovskými prostory
 - Zobrazení a transformace
 - „Chain Rule“
 - Věta o inverzním zobrazení

- 2 Implicitně definovaná zobrazení

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- Silvie Kuráňová, Jan Vondra, *Diferenciální počet funkcí více proměnných - interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*, PŘF MU, 2009, <http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html>
- *Předmětové záložky v IS MU*

Obsah první písemky

- určování limit, resp. důkaz neexistence, spojitost
- výpočty parciálních a směrových derivací
- použití diferenciálu – aproximace, tečná nadrovina
- využití Taylorovy věty a Hessiánu pro aproximaci
- implicitně definované funkce
- určování lokálních a globálních extrémů.

Zobrazení $F : E_n \rightarrow E_m$ je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná m -tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí $f_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *diferencovatelné* nebo *spojitě diferencovatelné zobrazení*, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce f_1, \dots, f_m .

Diferencovatelná zobrazení $F : E_n \rightarrow E_n$, která mají inverzní zobrazení $G : E_n \rightarrow E_n$ definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**. Příkladem transformace v E_2 je přechod mezi polárními a kartézskými souřadnicemi:

$$[r, \theta] \mapsto [r \cos \theta, r \sin \theta]$$

s inverzí

$$[x, y] \mapsto [\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}], [0, y] \mapsto [y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y].$$

Lineární zobrazení $df_i(x) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ lineárně aproximují přírůstky f_i .

Definice

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} df_1(x) \\ df_2(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení F** v bodě x . Lineární zobrazení $D^1F(x)$ definované na přírůstcích $v = (v_1, \dots, v_n)$ pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení F** v bodě x z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)) = \mathbf{0}.$$

Důsledek Věty o existenci diferenciálu pro funkce n proměnných je:

Věta

Nechť $F : E_n \rightarrow E_m$ je zobrazení, jehož všechny souřadné funkce mají spojité parciální derivace v okolí bodu $x \in E_n$. Pak existuje diferenciál $D^1F(x)$ zobrazení F zadaný Jacobiho maticí.

Diferenciál složeného zobrazení

Věta („Chain rule“, o derivaci složeného zobrazení)

Nechť $F : E_n \rightarrow E_m$ a $G : E_m \rightarrow E_r$ jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor G obsahuje celý obor hodnot F . Pak také složené zobrazení $G \circ F$ je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního oboru F kompozicí diferenciálů

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1G(F(x)) \circ D^1F(x).$$

Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.

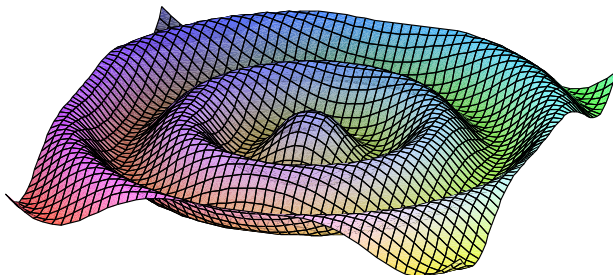
Polární souřadnice vzniknou z kartézských souřadnic transformací $F : E_2 \rightarrow E_2$, kterou v souřadnicích $[x, y]$ a $[r, \varphi]$ zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Uvažme funkci $g_t : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanou v polárních souřadnicích předpisem

$$g(r, \varphi, t) = \sin(r-t).$$

Funkce nám docela dobře přibližuje vlnění povrchu hladiny po bodovém vzruchu v počátku v čase t :



Chceme-li vypočítat derivaci funkce zadané parametricky v kartézských souřadnicích, využijeme větu o derivaci složeného zobrazení $g \circ F : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} D^1(g \circ F)(x) &= D^1g(F(x)) \circ D^1F(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, t) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2} - t) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 0$$

a podobně

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, t) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2} - t) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Věta o inverzní funkci jedné proměnné – připomenutí

Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujeme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, vztah pro derivaci složené funkce nám (pro $y = f(x)$) dává

$$1 = (\text{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové) $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Věta

Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Příklady – opakování

Příklad

Určete derivaci v obecném bodě definičního oboru inverzní funkce k funkci:

- 1 e^x ;
- 2 $\sin x$.

Věta o inverzním zobrazení

Věta

Nechť $F : E_n \rightarrow E_n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu $x^ \in E_n$ a necht' je Jacobiho matice $D^1F(x^*)$ invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu x^* existuje inverzní zobrazení F^{-1} a jeho diferenciál v bodě $F(x^*)$ je inverzním zobrazením k $D^1F(x^*)$, tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení F v bodě x^* .*

Příklad

Rozhodněte, zda zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definované po souřadnicích

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$$

je prosté v okolí bodu $[2, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$.

Příklad

Spočítejte jacobíán zobrazení F , které je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.

Věta o implicitní funkci – neformální připomenutí

Pokud máme zadánu funkci $f(x)$ vzorcem $y = f(x)$, hovoříme o jejím *explicitním* zadání. Obecnějším zadáním funkce je rovnice $F(x, y) = 0$, kde závislá proměnná y představuje „neznámou“ funkci. Pokud tuto rovnici nelze (nebo to nepotřebujeme) vyřešit vzhledem k y , pak hovoříme o funkci zadané *implicitně*. Avšak i v tomto obecnějším případě budeme schopni vypočítat $y'(x)$ (aniž bychom nutně znali explicitní vzorec pro $y(x)$), a to pomocí pravidla pro derivaci složené funkce.

Příklad

Rovnice $y^2 = x$ definuje *dvě* diferencovatelné funkce proměnné x :

$$y_1 = \sqrt{x}, \quad y_2 = -\sqrt{x}$$

Při derivování implicitně zadaných funkcí obsahuje výsledná derivace y' jak proměnnou x tak proměnnou y (na rozdíl od *běžného* derivování funkce, kdy je ve výsledku pouze proměnná x).

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2 :

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $F(x, y) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ hledejme body $[x, y]$, ve kterých platí $F(x, y) = 0$. Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímk a kružnic:

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$

$$F(x, y) = (x - s)^2 + (y - t)^2 - r^2 = 0, \quad r > 0.$$

V prvním případě je (při $b \neq 0$) předpisem zadaná funkce

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

pro všechna x . Ve druhém případě umíme pouze pro $[a, b]$ splňující rovnici kružnice a $b \neq t$ najít okolí bodu a , na kterém nastane

$$\begin{aligned} \text{jedna z možností: } y = f(x) &= t + \sqrt{(x - s)^2 - r}, \\ y = f(x) &= t - \sqrt{(x - s)^2 - r}. \end{aligned}$$

Body $[s \pm r, t]$ také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale $F_y(s \pm r, t) = 0$, což znamená, že tečna ke kružnici v těchto bodech je rovnoběžná s osou y . **V těchto bodech neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce $y = f(x)$.**

Navíc umíme spočítat i **derivace**:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Naopak, pokud budeme chtít najít závislost $x = f(y)$ takovou, aby $F(f(y), y) = 0$, pak v okolí bodů $(s \pm r, t)$ bez problémů uspějeme. Všimněme si, že v těchto bodech je parciální derivace F_x nenulová.

Shrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):

Pro funkci $F(x, y)$ a bod $[a, b] \in E_2$ takový, že $F(a, b) = 0$, umíme najít funkci $y = f(x)$ splňující $F(x, f(x)) = 0$, pokud je $F_y(a, b) \neq 0$. V takovém případě umíme i vypočítat $f'(x) = -F_x/F_y$. Z následující věty plyne, že takto to platí vždy, navíc pro libovolné počty proměnných.

Věta (O implicitní funkci)

Nechť $F : E_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce na otevřeném okolí bodu $[x^, y^*] \in E_n \times \mathbb{R}$, ve kterém je $F(x^*, y^*) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$. Potom existuje spojitá funkce $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu $x^* \in E_n$ taková, že $F(x, f(x)) = 0$ pro všechny $x \in U$.*

Navíc má funkce f v okolí bodu x^ parciální derivace splňující*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Pomůcka

Poslední tvrzení o derivaci přitom je dobře zapamatovatelné (i pochopitelné) z výrazu pro diferenciál:

$$0 = dF = F_x dx + F_y dy = (F_x + F_y f'(x)) dx.$$

Příklad

Určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$, která je určena implicitně rovnicí $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz - 1 = 0$.

Řešení

Derivováním rovnosti podle x a y dostáváme:

$$2x + 2z \cdot z_x - z - x \cdot z_x - \sqrt{2}yz_x = 0$$

$$2y + 2z \cdot z_y - x \cdot z_y - \sqrt{2}z - \sqrt{2}yz_y = 0,$$

odkud vyjádříme

$$z_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Řešení (pokr.)

Stacionární body musí splňovat: $z_x = 0$, $z_y = 0$, tj. $z = 2x = \sqrt{2}y$, a tedy $y = \sqrt{2}x$. Dosazením do původní rovnice dostáváme stacionární body $[1, \sqrt{2}, 2]$ a $[-1, -\sqrt{2}, -2]$. V těchto bodech je $F_z \neq 0$ (je to zároveň jmenovatel všech zde vystupujících zlomků), proto je v jejich okolí implicitně určena jistá funkce $z = f(x, y)$. Dalším derivováním implicitní rovnice vypočteme parciální derivace f 2. řádu:

$$z_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je Hf negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastávají lokální maximum, resp. minimum funkce f .

Body, v nichž *není* danou rovnicí implicitně určena funkce $z = f(x, y)$ jsou body roviny $2z - x - \sqrt{2}y = 0$ (tedy body, v nichž během výpočtu dostaneme nulový jmenovatel některé z derivací).

Příklady k procvičení

Příklad

Ukažte, že funkce $F(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ definuje předpisem $F(x, y) = 1$ pro $[x, y] \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ implicitně proměnnou y jako funkci $f(x)$ proměnné x . Určete $f'(x)$.

Příklad

Rozhodněte, zda křivka tvořená body vyhovujícími vztahu $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Nejobecnější případ, kdy definujeme implicitně zadané zobrazení, popisuje následující věta (v případě $n=1$ kopíruje větu o implicitní funkci).

Věta (O implicitním zobrazení)

Nechť $F : E_{m+n} \rightarrow E_n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení na otevřeném okolí bodu $[x^, y^*] \in E_m \times E_n = E_{m+n}$, v němž platí $F(x^*, y^*) = \mathbf{0}$ a $\det D_y^1 F \neq 0$. Potom existuje spojitě diferencovatelné zobrazení $G : E_m \rightarrow E_n$ definované na nějakém okolí U bodu $x^* \in E_m$ s obrazem $G(U)$, který obsahuje bod y^* , a takové, že $F(x, G(x)) = 0$ pro všechny $x \in U$. Navíc je Jacobiho matice $D^1 G$ zobrazení G na okolí bodu x^* zadána součinem matic*

$$D^1 G(x) = -(D_y^1 F)^{-1}(x, G(x)) \cdot D_x^1 F(x, G(x)).$$