Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

příklad *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1

Náhodný výběr (8 bodů): Detailní hloubku moře lze pro hloubky v rozmezí mezi 1 km a 5 km měřit přístrojem, který má rozptyl $2500\,\mathrm{m}^2$. Určete:

(a) Minimální počet měření nutný k tomu, aby bylo dosaženo přesnosti 5 m se spolehlivostí 0,95. (3)

(b) Výběrový průměr a výběrový rozptyl z měření s výsledky: 1325, 1285, 1400, 1350, 1295, 1380. (2)

(c) Interval spolehlivosti 0,95 pro měřenou hloubku odvozený z výše uvedených měření za předpokladu, že k měření byl použit nový přístroj s neznámým rozptylem. (3)

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

0001 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Příklad 2

Diferenciální rovnice (6 bodů): Určete funkce $y = f(x)$, pro které platí, že tečna k jejich grafu v libovolném jeho bodě spolu s rovnoběžkou s osou y vedenou tímto bodem a spolu s osou x vymezí trojúhelník o jednotkovém obsahu (nezávisle na volbě bodu dotyku). (Sestavte nejprve příslušnou diferenciální rovnici a tu vyřešte.)

Jméno: **Skupina: A** **Místnost:** **1. zkouška**

0001 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Vlastnosti funkcí (6 bodů) : Nechť M značí definiční obor funkce

Příklad 3

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sqrt{x-x^2}}-\sqrt{\sqrt{1-x^2}-y}.$$

(a) Zobrazte M v rovině. (1)

(b) Do obrázku M načrtněte vrstevnice funkce $g(x,y)=3x+y$ a výpočtem určete největší a nejmenší hodnotu $g(x,y)$ na množině M (tj. zejména určete body, v nichž dojde k dotyku vrstevnice na úrovni c s hranicí množiny M pro nejmenší, resp. největší c). (2)

(c) Pomocí integrálu dvou proměnných vypočtěte obsah množiny M. (3)

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1

Náhodný výběr (8 bodů): Volejbalový trenér tvrdí, že volejbalistky mají větší objem plic než průměr ženské populace stejné věkové skupiny, který činí 3,4 litru.

(a) Během tréninkového kempu byla uskutečněna měření s následujícími výsledky: 3,4 3,6 3,8 3,3 3,4 3,5 3,7 3,6 3,7 3,4 3,6.

Se spolehlivostí 95% rozhodněte, zda je tvrzení trenéra opodstatněné – tj. sestrojte příslušný jednostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení, z něhož pochází výběr volejbalistek. (3)

(b) Z výše uvedeného výběru určete interval spolehlivosti 95% pro neznámý rozptyl σ^2 rozdělení, z něhož výběr pochází. (2)

(c) Určete potřebný rozsah výběru volejbalistek, jejichž objem plic je třeba změřit, aby mohl trenér svůj výrok vyslovit s 99% spolehlivostí (předpokládáme stejnou hodnotu M a $\sigma^2 = 0{,}09$). (3)

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Diferenciální rovnice (6 bodů): Šálek kávy má v počátečním stavu v čase $t = 0$ teplotu 100 °C. Teplota pokoje je 20 °C. Určete teplotu kávy $u = u(t)$ jako funkci času v situaci, která je popsána Newtonovým zákonem ochlazování: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\lambda(u - u_p)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta úměrnosti a u_p je (konstantní) teplota pokoje. Určete λ a rozhodněte, za jak dlouho teplota kávy klesne na 50 °C, pokud její teplota po 5 minutách byla 80 °C.

Příklad 2

Jméno: **Skupina: B** **Místnost:** **1. zkouška**

0002 *příklad* 3 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3

Vlastnosti funkcí (6 bodů) : Nechť M značí definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{2x - x^2} + \sqrt{y - y^2} + \sqrt{y^2 - x + 1}.$$

(a) Zobrazte M v rovině. (1)

(b) Do obrázku M načrtněte vrstevnice funkce $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x$ a výpočtem určete její největší a nejmenší hodnotu na množině M (tj. zejména určete body, v nichž dojde k dotyku vrstevnice na úrovni c s hranicí množiny M pro nejmenší, resp. největší c; můžete využít toho, že v bodě dotyku mají křivky společnou tečnu i normálu). (3)

(c) Vypočtěte integrál $\int\int_M x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$. (2)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1

Náhodný výběr (8 bodů): Detailní hloubku moře lze pro hloubky v rozmezí mezi 1 km a 5 km měřit přístrojem, který má rozptyl 1600 m^2. Určete:

(a) Minimální počet měření nutný k tomu, aby bylo dosaženo přesnosti 10 m se spolehlivostí 0,90. (3)

(b) Výběrový průměr a výběrový rozptyl z měření s výsledky: 1235, 1285, 1040, 1350, 1295. (2)

(c) Interval spolehlivosti 0,95 pro měřenou hloubku odvozený z výše uvedených měření za předpokladu, že k měření byl použit nový přístroj s neznámým rozptylem. (3)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 *příklad* 2 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2

Diferenciální rovnice (6 bodů): Určete funkce $y = f(x)$, pro které platí, že tečna k jejich grafu v libovolném jeho bodě $[x_0, y_0]$ protíná osu x v bodě $[\frac{x_0}{2}, 0]$. (Sestavte nejprve příslušnou diferenciální rovnici a tu vyřešte.)

Jméno: **Skupina: C** **Místnost:** **1. zkouška**

0003 ***příklad*** 3 ***učo*** ***body***

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 3

Vlastnosti funkcí (6 bodů) : Nechť M značí definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\sqrt{1-y^2}-x} + 2\sqrt{\sqrt{y-y^2}+x}.$$

(a) Zobrazte M v rovině. (1)

(b) Do obrázku M načrtněte vrstevnice funkce $g(x,y) = x+3y$ a výpočtem určete největší a nejmenší hodnotu $g(x,y)$ na množině M (tj. zejména určete body, v nichž dojde k dotyku vrstevnice na úrovni c s hranicí množiny M pro nejmenší, resp. největší c). (2)

(c) Pomocí integrálu dvou proměnných vypočtěte obsah množiny M. (3)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 1 *učo* *body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1

Náhodný výběr (8 bodů): Volejbalový trenér tvrdí, že volejbalistky mají větší objem plic než průměr ženské populace stejné věkové skupiny, který činí 3,45 litru.

(a) Během tréninkového kempu byla uskutečněna měření s následujícími výsledky:
3,6 3,3 3,5 3,4 3,7 3,7 3,6 3,6 3,4 3,8 3,4.

Se spolehlivostí 97,5% rozhodněte, zda je tvrzení trenéra opodstatněné – tj. sestrojte příslušný jednostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení, z něhož pochází výběr volejbalistek. (3)

(b) Z výše uvedeného výběru určete interval spolehlivosti 90% pro neznámý rozptyl σ^2 rozdělení, z něhož výběr pochází. (2)

(c) Určete potřebný rozsah výběru volejbalistek, jejichž objem plic je třeba změřit, aby mohl trenér svůj výrok vyslovit s 95% spolehlivostí (předpokládáme stejnou hodnotu M a $\sigma^2 = 0{,}1$). (3)

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 2 *učo* *body*

0123456789

Příklad 2

Diferenciální rovnice (6 bodů): Newtonův zákon ochlazování/oteplování tekutiny je: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\lambda(u - u_p)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta úměrnosti, $u = u(t)$ je teplota tekutiny v čase t po umístění do pokoje a u_p je (konstatní) teplota pokoje. Studené pivo má teplotu $10\,^{\circ}\mathrm{C}$. Po 10 minutách v místnosti o teplotě $30\,^{\circ}\mathrm{C}$ je jeho teplota $15\,^{\circ}\mathrm{C}$. Určete λ a zjistěte, za jak dlouho se za těchto podmínek pivo ohřeje na teplotu $20\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Jméno: **Skupina: D** **Místnost:** **1. zkouška**

0004 *příklad* 3 *učo* *body*

0123456789

Vlastnosti funkcí (6 bodů) : Nechť M značí definiční obor funkce

Příklad 3

$$f(x,y) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{2-y} + \sqrt{y} + \sqrt{x^2 - y + 1}.$$

(a) Zobrazte M v rovině. (1)

(b) Do obrázku M načrtněte vrstevnice funkce $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4y$ a výpočtem určete její největší a nejmenší hodnotu na množině M (tj. zejména určete body, v nichž dojde k dotyku vrstevnice na úrovni c s hranicí množiny M pro nejmenší, resp. největší c; můžete využít toho, že v bodě dotyku mají křivky společnou tečnu i normálu). (3)

(c) Vypočtěte integrál $\int\int_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$. (2)