

Jméno:

Skupina: A

Místnost: D1

3. zkouška



příklad



učo



body



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Statistika (7 bodů):** Z každého z předchozích zkušebních termínů bylo **Příklad 1** náhodně vybráno 6 studentů. Bodové zisky byly na prvním termínu: 6,3; 4,0; 5,2; 2,3; 4,8; 1,5, na druhém termínu: 9,3; 4,0; 7,3; 5,5; 8,4; 5,0. Předpokládejte, jde o realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z normálních rozdělání, jejichž rozptyly jsou sice neznámé, ale stejné. Testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že první termín nebyl obtížnější než druhý (oproti alternativě, že obtížnější byl), tj. že střední hodnota zisku bodů není u prvního termínu významně nižší než u druhého.

Jméno:

Skupina: A

Místnost: D1

3. zkouška

0001

příklad

2

učo

|

body

0123456789

**Extrémy (7 bodů):** Najděte všechny stacionární body funkce  $z = f(x, y)$  **Příklad 2**  
 definované implicitně rovnicí

$$4x^3 - 12x + 4y^2 - 16y + (z + 1)^3 + 16 = 0.$$

Dále zjistěte, zda jsou v těchto stacionárních bodech lokální extrémy. Pro každý z nich v případě kladné odpovědi také určete druh extrému.

Jméno:

Skupina: A

Místnost: D1

3. zkouška

0001

příklad

3

učo

|

body

0123456789

**Diferenciální rovnice (6 bodů) :** Jedna z metod určování stáří artefaktů **Příklad 3** je tzv. radioaktivní metoda. Kosmické záření produkuje radioaktivní izotop uhlíku  $C^{14}$  (poločas rozpadu  $T = 5568$  let). Tento izotop je absorbován zelenými rostlinami. Do těla živočichů se dostává potravou. V živých tkáních živočichů i rostlin je dávka  $C^{14}$  v rovnováze s množstvím rozpadlého  $C^{14}$ . Když organismus zemře, přestane přijímat  $C^{14}$  a tak se koncentrace  $C^{14}$  začne snižovat. Za předpokladu, že aktivita kosmického záření je pořád stejná, lze usuzovat, že množství  $C^{14}$  v živých tkáních je pořád stejná. Z toho lze odvodit přibližné stáří vzorků.

- (a) Rozpad prvku se řídí rovnicí  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ , kde  $N(t)$  značí množství látky v čase  $t$ ,  $N_0$  udává množství látky na začátku (v čase  $t = 0$ ) a  $\lambda$  je konstanta. Určete konstantu  $\lambda$  pro uhlík  $C^{14}$ .
- (b) Dřevěné uhlí z doby osídlení jeskyně Lascaux vykazovalo v roce 1950 aktivitu  $a_1 = 0,97 \text{ min}^{-1} \text{ g}^{-1}$ , živé dřevo mělo  $a_0 = 6,68 \text{ min}^{-1} \text{ g}^{-1}$ . Aktivita je definována vztahem  $a = -N'(t)/m$ , kde  $m$  je hmotnost vzorku. Odhadněte dobu vzniku kreseb uhlím v jeskyni.

Jméno:

Skupina: B

Místnost: D1

3. zkouška

0002

*příklad*

1

*učo*

2

*body*

0123456789

**Statistika (7 bodů):** Z každého z předchozích zkušebních termínů bylo **Příklad 1** náhodně vybráno 6 studentů. Bodové zisky byly na prvním termínu: 7,3; 5,0; 6,2; 3,3; 5,8; 2,5, na druhém termínu: 9,3; 4,0; 7,3; 5,5; 8,4; 5,0. Předpokládejte, jde o realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z normálních rozdělání, jejichž rozptyly jsou sice neznámé, ale stejné. Testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že první termín nebyl obtížnější než druhý (oproti alternativě, že obtížnější byl), tj. že střední hodnota zisku bodů není u prvního termínu významně nižší než u druhého.

Jméno:

Skupina: B

Místnost: D1

3. zkouška

0002

*příklad*

2

*učo*

2

*body*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Extrémy (7 bodů):** Najděte všechny stacionární body funkce  $z = f(x, y)$  **Příklad 2**  
 definované implicitně rovnicí

$$4x^2 + 8x + 4y^3 + 12y^2 + (z + 2)^3 - 4 = 0.$$

Dále zjistěte, zda jsou v těchto stacionárních bodech lokální extrémy. Pro každý z nich v případě kladné odpovědi také určete druh extrému.

Jméno:

Skupina: B

Místnost: D1

3. zkouška

0002

příklad

3

učo

2

body

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

**Diferenciální rovnice (6 bodů) :** Jedna z metod určování stáří artefaktů **Příklad 3**

je tzv. radioaktivní metoda. Kosmické záření produkuje radioaktivní izotop uhlíku  $C^{14}$  (poločas rozpadu  $T = 5568$  let). Tento izotop je absorbován zelenými rostlinami. Do těla živočichů se dostává potravou. V živých tkáních živočichů i rostlin je dávka  $C^{14}$  v rovnováze s množstvím rozpadlého  $C^{14}$ . Když organismus zemře, přestane přijímat  $C^{14}$  a tak se koncentrace  $C^{14}$  začne snižovat. Za předpokladu, že aktivita kosmického záření je pořád stejná, lze usuzovat, že množství  $C^{14}$  v živých tkáních je pořád stejná. Z toho lze odvodit přibližné stáří vzorků.

- Úbytek prvku v určitém časovém intervalu je přímo úměrný (konstantu úměry označme  $\lambda$ ) jeho množství na začátku tohoto intervalu. Sestavte odpovídající diferenciální rovnici, vyřešte ji a určete  $\lambda$  pro uhlík  $C^{14}$ .
- Dřevěné uhlí z doby osídlení jeskyně Lascaux mělo v roce 1950 obsah uhlíku  $C^{14}$  vůči jeho původní hodnotě 14,5%. Odhadněte dobu vzniku kreseb uhlím v jeskyni.