

Matematika III, 7. cvičení

Integrální počet funkcí dvou proměnných

Pokud lze množinu $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadat pomocí spojitě funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici (např. $x \in \langle a, b \rangle$) umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle$, pak

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Příklad 113. Vypočtete $\iint_{(0,1) \times (-1,2)} (x^2 + 2xy) \, dx \, dy$.

Výsledek. $\frac{5}{2}$.

Příklad 114. Vypočtete $\iint_{(0,1) \times (0,3)} [3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2] \, dx \, dy$.

Výsledek. 12.

Příklad 115. Vypočtete $\int_0^1 \int_{x^2}^x (2 - xy) \, dy \, dx$.

Výsledek. $\frac{7}{24}$.

Příklad 116. Vypočtete $\int_0^1 \int_0^\pi (x \sin y) \, dy \, dx$.

Výsledek. 1.

Příklad 117. Vypočtete $\int_3^4 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \, dy \, dx$. (Tip: po nějaké době rozložte na parciální zlomky.)

Výsledek. $3 \ln 2 - \ln 3$.

Příklad 118. Zaměňte pořadí integrace: $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y) \, dy \, dx$.

Výsledek. $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy$.

Příklad 119. Zaměňte pořadí integrace: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x, y) \, dy \, dx$.

Výsledek. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) \, dx \, dy$.

Příklad 120. Spočítejte $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2 \, dx \, dy$.

Nápověda. Protože integrál $\int \sin x^2 \, dx$ neumíme vypočítat, zaměňte nejdříve pořadí integrace a pak výsledný integrál spočítejte pomocí substituce $t = x^2$.

Výsledek. $\frac{1}{6}$.

Příklad 121. Spočítejte $I = \iint_M 8y \, dx \, dy$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, xy \geq 1, x + y \leq \frac{5}{2}\}$.

Nápověda. $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 8y \, dy \, dx$.

Výsledek. $\frac{9}{2}$.

Příklad 122. Spočítejte $\iint_S xy^2 \, dx \, dy$, kde S je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Výsledek. $\frac{1}{40}$.

Příklad 123. Spočítejte $\iint_A x^3 y \, dx \, dy$, kde A je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^3$.

Výsledek. $\frac{1}{30}$.

Transformace souřadnic při integraci

Nechť $G(x, y): M \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je prosté, prvky Jacobiho matice $G'(x, y)$ jsou spojité funkce a $\det G'(x, y) \neq 0$ pro všechna $[x, y] \in M$. Pak pro každou „rozumnou“ (přesněji Riemannovsky měřitelnou) množinu K a spojitou funkci $f: G(K) \rightarrow \mathbb{R}$ platí:

$$\iint_{G(K)} f(s, t) \, ds \, dt = \iint_K f(G(x, y)) |\det G'(x, y)| \, dx \, dy.$$

Velmi důležitá je transformace do polárních souřadnic:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

tj. pro dané r a φ dostaneme bod ve vzdálenosti r od počátku $[0, 0]$, přičemž velikost orientovaného úhlu, vedeného v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček) od osy x k polopřímce začínající v $[0, 0]$ a procházející přes tento bod, je φ .

Tedy $G(r, \varphi) = [r \cos \varphi, r \sin \varphi] = [g(r, \varphi), h(r, \varphi)]$. Pak Jacobiho matice zobrazení G je $G'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\varphi \\ h'_r & h'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$. Dále jacobíán je $\det G'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$. Protože poloměr $r \geq 0$, je $|\det G'(r, \varphi)| = |r| = r$. Transformace do polárních souřadnic je obvykle výhodná, pokud je množina, přes kterou integrujeme, kruhem, mezikružím, kruhovou výsečí nebo něčím podobným.

Někdy je lepší použít transformaci do polárních souřadnic se středem v bodě $[a, b]$ (obvykle v případech, kdy je množina, přes kterou integrujeme, podobná kruhu se středem v bodě $[a, b]$) místo výše uvedené transformace se středem v bodě $[0, 0]$:

$$x = r \cos \varphi + a, \quad y = r \sin \varphi + b.$$

Snadno si můžete ověřit, že jacobíán této transformace je opět r . Přípustné hodnoty nových proměnných jsou $r \in \langle 0, \infty \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zdůrazněme zejména, že transformace při výpočtu integrálů více proměnných vybíráme podle tvaru množiny, přes kterou se integruje, nikoliv podle integrované funkce, jako je tomu u integrálů jedné proměnné!

Příklad 124. Pomocí přechodu k polárním souřadnicím zjednodušte dvojný integrál

$$I = \iint_M f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy,$$

kde $M: x^2 + y^2 \leq 1$.

Výsledek. $2\pi \int_0^1 r f(r) \, dr$.

Příklad 125. Spočítejte integrál

$$\iint_M \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \, dx \, dy,$$

kde $M: 1 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$.

Nápověda. M je mezikružím se středem $[1, -1]$, tudíž použijeme polární souřadnice se středem $[1, -1]$.

Výsledek. $\frac{14}{3}\pi$.

Příklad 126. Užitím transformace $u = xy, y = vx$ spočítejte $I = \iint_A x^2 y^2 \, dx \, dy$, kde množina A je ohraničena křivkami $xy = \frac{1}{2}, xy = 2, 2y = x, y = 2x$, přičemž $x, y \geq 0$.

Výsledek. Transformace $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}, \det G'(u, v) = \frac{1}{2v}$, meze: $u \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle, v \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle, I = \frac{63}{24} \ln 2$.

Příklad 127. Užitím transformace $u = xy, v = \frac{y^2}{x}$ spočtěte $I = \iint_A \sqrt{xy} \, dx \, dy$, kde množina A je ohraničena křivkami $y^2 = 2x, y^2 = x, xy = 1, xy = 2$.

Nápověda. Není potřeba vyjadřovat transformaci $G : x = f(u, v), y = g(u, v)$. Stačí uvažovat inverzní transformaci $G^{-1} : u = xy, v = \frac{y^2}{x}$, neboť $G \circ G^{-1} = id$, tudíž $\det G' \cdot \det(G^{-1})' = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ a z toho $\det G'(u, v) = \frac{1}{\det(G^{-1})'(x, y)}$, přičemž pravou stranu rovnosti budeme muset převést do proměnných u, v .

Výsledek. $\det(G^{-1})'(x, y) = \frac{3y^2}{x}, \det G'(u, v) = \frac{1}{3v}$, meze: $u \in \langle 1, 2 \rangle, v \in \langle 1, 2 \rangle, I = \frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1) \ln 2$.

Příklad 128. Vypočtěte integrál $\iint_A 2(x^2 + y^2) \, dA$, kde $A : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|$.

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic.

Výsledek. $\frac{7}{3}\pi$.

Příklad 129. Vypočtěte $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx$.

Nápověda. Transformujte do polárních souřadnic.

Výsledek. $\frac{3}{8}\pi$.

Obsah plochy, hmotnost, těžiště

Integrály můžeme využít například při výpočtu následujících věcí:

- (1) obsah plochy A je

$$\iint_A dx \, dy,$$

- (2) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x, y]$ danou funkcí $\varrho(x, y)$ má hmotnost

$$M = \iint_A \varrho(x, y) \, dx \, dy,$$

- (3) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x, y]$ danou funkcí $\varrho(x, y)$ má souřadnice těžiště $[x_0, y_0]$ dané vztahy

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_A x \varrho(x, y) \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_A y \varrho(x, y) \, dx \, dy.$$

Příklad 130. Určete obsah množiny A ohraničené křivkami $x = y^2$ a $x = 4y^2 - 3$.

Výsledek. 4.

Příklad 131. Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami o rovnicích $x = 0, y = \frac{1}{x}, y = 8$ a $y = 4x$.

Výsledek. $\frac{1}{2} + 2 \ln 2$.

Příklad 132. Máme destičku ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protější vrcholku je rovna 2. Najděte těžiště destičky.

Nápověda. Uvažujte trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1/\sqrt{2}, 0]$, $[0, 1/\sqrt{2}]$.

Výsledek. $M = \frac{1}{6}$, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $y_0 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}-x} 2\sqrt{2}y^2 dy dx = \frac{\sqrt{2}}{24}$, $T = [\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{24}]$.

Příklad 133. Určete souřadnice těžiště homogenní destičky ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $x + y = 2$.

Výsledek. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.

Příklad 134. Určete souřadnice těžiště destičky, ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $x + y = 1$, je-li hustota v bodě $[x, y]$ rovna jeho vzdálenosti od osy y .

Výsledek. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.

Příklad 135. Určete souřadnice těžiště T kruhové destičky $x^2 + y^2 \leq a^2$, kde $a > 0$, je-li její hustota v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od bodu $[a, 0]$ (pro výpočet můžeme vzít hustotu rovnu c krát zmíněná vzdálenost).

Nápověda. Užijte transformaci $x - a = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, tj. polární souřadnice se středem $[a, 0]$.

Výsledek. $M = \frac{32a^3c}{15}$, $T = [-\frac{a}{5}, 0]$.