

Diferencialni rovnice

MB103 - podzim 2013

Cvičení 8

Příklad 1. Najděte obecné řešení rovnice

$$2y - x^3 y' = 0.$$

Výsledek. $y = ce^{-x^{-2}}$

Příklad 2. Najděte obecné řešení rovnice

$$\frac{x^3 dx}{\sin y} + \frac{y dy}{x} = 0.$$

Výsledek. $\frac{x^5}{5} + c = y \cos y - \sin y$

Příklad 3. Najděte obecné řešení rovnice

$$(x + 1)dy + xydx = 0.$$

Výsledek. $y = c(x + 1)e^{-x}$

Příklad 4. Najděte obecné řešení rovnice

$$\frac{1}{x + 1}dx - \frac{1}{y - 1}dy = 0.$$

Výsledek. $y = c(x + 1) + 1$

Příklad 5. Řešte diferenciální rovnici s počátečními podmínkami $y(1) = 1$

$$y \ln y + xy' = 0.$$

Výsledek. $y = 1$

Příklad 6. Řešte diferenciální rovnici s počátečními podmínkami $y(0) = 1$

$$(1 + e^x)\frac{y'}{y} + e^x = 0.$$

Výsledek. $y = 2(1 + e^x)^{-1}$

Příklad 7. Najděte obecné řešení rovnice

$$2xy' = 3y + x.$$

Výsledek. $cx^3 = (x + y)^2$

Příklad 8. Najděte obecné řešení rovnice

$$(x^2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

Výsledek. $y = ce^{\frac{y}{x}}$

Příklad 9. Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' = 2x + y.$$

Výsledek. $y = 2x \ln |cx|$

Příklad 10. Najděte obecné řešení rovnice

$$(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Výsledek. $y^3 - 3yx^2 - x^3 = c$

Příklad 11. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = 6x - 2y.$$

Výsledek. $y = 3x - \frac{3}{2} + ce^{-2x}$

Příklad 12. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + 4x^3y = x^2e^{-x^4}.$$

Výsledek. $y = (\frac{x^3}{3} + c)e^{-x^4}$

Příklad 13. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = 6xy + 4xe^{3x^2}.$$

Výsledek. $(2x^2 + c)e^{3x^2}$

Příklad 14. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + y \cos x = \sin 2x.$$

Výsledek. $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$

Příklad 15. Najděte obecné řešení rovnice

$$(e^y - x)y' = y.$$

Výsledek. $x = \frac{e^y + c}{y}$

Příklad 16. Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' - y = -xy^2.$$

Výsledek. $y = \frac{2x}{x^2+2c}, y = 0$

Příklad 17. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' + xy = xy^3.$$

Výsledek. $y^2 = (ce^{x^2} + 1)^{-1}$

Příklad 18. Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Výsledek. $y = y(1 + \ln x + cx) = 1$

Příklad 19. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}.$$

Výsledek. $y = x^4(\ln(\sqrt{|x|}) + c)^2$

Příklad 20. Čistička vody o objemu 2000 m^3 byla znečištěna olovem, které se nachází ve vodě v ní v množství 10 g/m^3 . Do čističky přitéká čistá voda rychlostí $2 \text{ m}^3/\text{s}$ a stejnou rychlostí i vytéká. Za jak dlouho poklesne obsah olova ve vodě v čističce pod $10 \text{ }\mu\text{g/m}^3$, předpokládáme-li, že voda je neustále rovnoměrně promíchávána?

Výsledek. 6 hodin a 35 minut.

Příklad 21. Rychlost, kterou se šíří epidemie v dané uzavřené populaci o P lidech, je přímo úměrná součinu počtu lidí, kteří jsou nakaženi, a počtu lidí, kteří jsou ještě nenakaženi. Určete funkci $f(t)$ popisující počet nakažených v čase.

Příklad 22. Poločas rozpadu radioaktivního prvku A je pět let, prvku B jeden rok. Máme-li 5 kg prvku B a 1 kg prvku A , za jak dlouho budeme mít stejné množství obou.

Výsledek. $\frac{5 \ln 5}{4 \ln 2}$