Příklad

a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:

- třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.
- první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.

a) A ... 1. koule bílá

B ... 2. koule bílá

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

přímo! $\overset{\shortparallel}{\frac{a-1}{a+b-1}}$

b) A ... první 2 kvalitní

B ... třetí zmetek

přímo!

• $P(B|A) = \frac{10}{98}$

• $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) =$

$$= \frac{10}{98} \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99}$$

Příklad

Dva střelci vystřelí nezávisle na sobě do téhož terče každý jednu ránu. Po střelbě byl v teči nalezen 1 zásah. Určete pravděpodobnost, že zásah patří 1. střelci, pokud tento trefuje terče s pravděpodobností 0,8, zatímco druhý střelec s pravděpodobností 0,4.

Dvěma způsoby:

A ... 1. trefí

B ... 2. se trefí

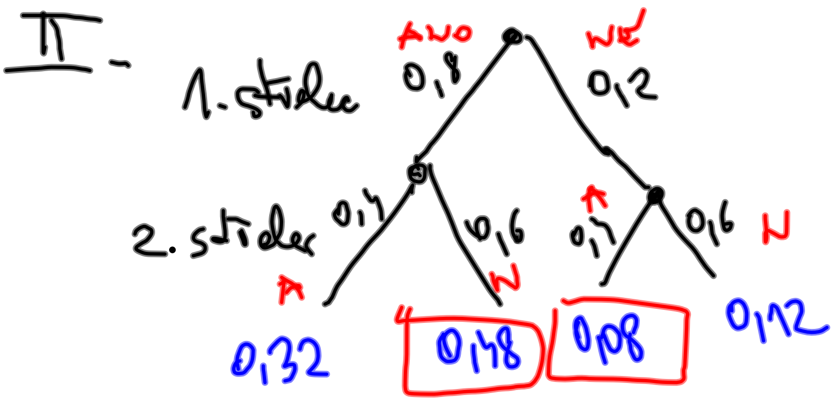
I.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

	A	A^c
B	0,32	$\boxed{0{,}08}$
B^c	$\boxed{0{,}48}$	0,12

$$\frac{0{,}48}{0{,}48+0{,}08} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

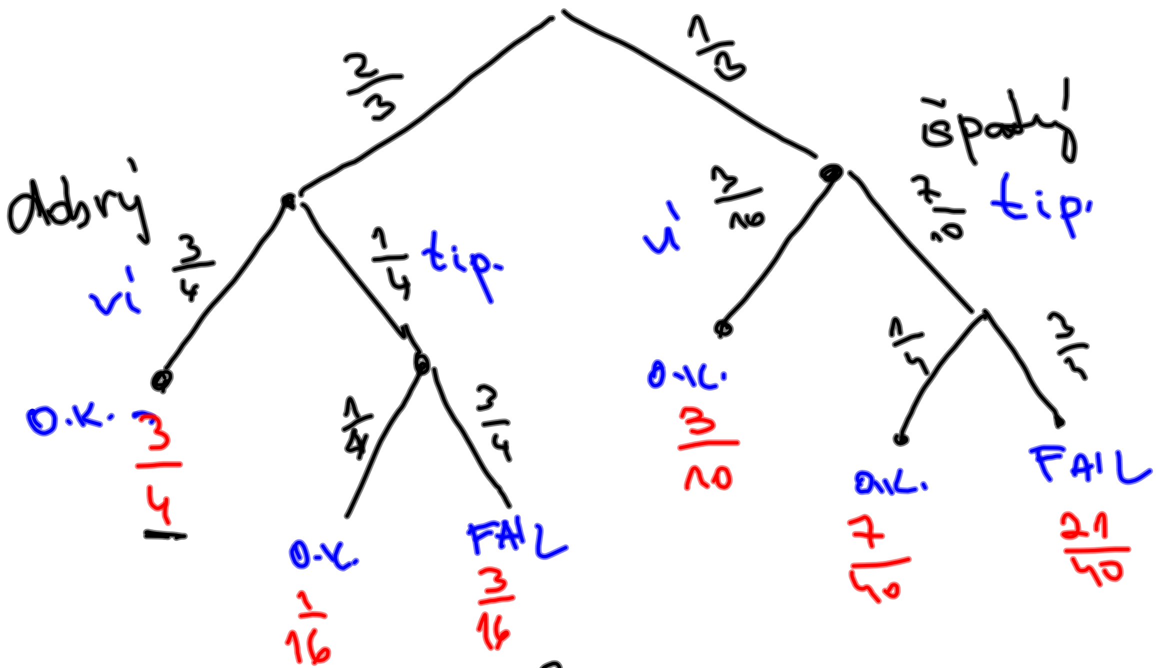
II.



$$\frac{0{,}48}{0{,}48+0{,}08} = \frac{6}{7}$$

V testu jsou u každé otázky 4 možné odpovědi. Pokud student nezná odpověď, tak hádá (uhodne s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). Dobrý student zná 75% odpovědí, slabý 30%. Jestliže byla určitá otázka zodpovězena správně, určete pravděpodobnost, že student jen hádal, jde-li o:

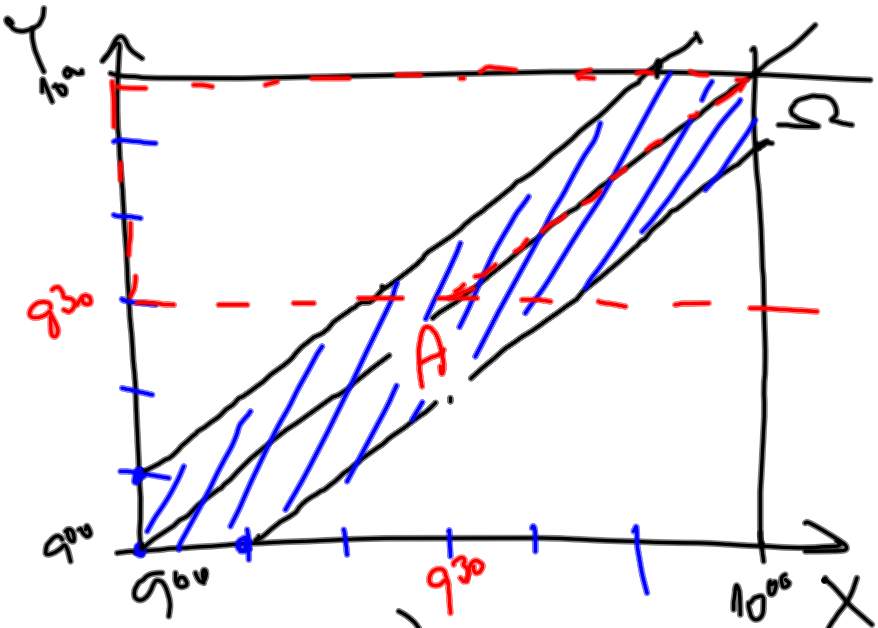
- a) dobrého studenta, $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{1/16}{13/16} = \frac{1}{13}$
- b) špatného studenta, $\frac{7/40}{3/10+7/40} = \frac{7}{19}$
- c) náhodného studenta, kdy navíc víme, že dobrých studentů jsou 2/3.



ad c) $$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{40}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{40}} = \frac{1}{7}$$

Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00[a]. Určete pravděpodobnost, že:

1. první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,
2. osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.



1. $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \mu(A) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}$

2. $P = \frac{\mu(\,)}{\mu(\,)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$

Příklady k procvičení

Příklad

Hodíme jedenkrát kostkou, množina elementárních jevů je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Jevovým polem nechť je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega\}$.
Zjistěte jestli zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dané předpisem

a) $X(\omega_i) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $X(\omega_1) = X(\omega_2) = -2, X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 3$,

je náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

Hodíme jedenkrát kostkou, množina elementárních jevů je
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Jevovým polem nechť je
$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega\}$.
Zjistěte jestli zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dané předpisem

a) $X(\omega_i) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $X(\omega_1) = X(\omega_2) = -2, X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 3$,

je náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

a) NE, např. $X^{-1}(\{1\}) = \{\omega_1\}$

$P(\{\omega_1\}) = ??$

b) ANO; $X^{-1}(\{-2\}) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = -2\}$

$= \{\omega_1, \omega_2\}$

$P_X(\{-2\}) = P(X^{-1}(\{-2\})) = P(X = -2)$

$= P(\{\omega_1, \omega_2\})$

např. $P(1 < X < 3) = P(\emptyset) = 0$

$P(-3 < X < 3) = P(\{\omega_1, \omega_2\})$

Příklad

Je dáno jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$, kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ a

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \Omega\}.$$

Najděte nějaké (co nejobecnější) zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$, které bude náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

$X(w_1) = X(w_2) = \underline{h_1}$

$X(w_3) = \underline{h_2}$

$X(w_4) = X(w_5) = \underline{h_3}$

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad x \in R.$$

$$P_X(\langle a, b \rangle) = P(a \leq X \leq b) =$$

$$= F_X(b) - P(X < a) =$$

$$= \underline{F_X(b) - F_X(a)} + P(X = a)$$

11 20-17:20

Příklad

Třikrát nezávisle na sobě hodíme mincí. Náhodná veličina X udává počet hlav, které padnou při těchto hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.

$$X : \Omega \to \{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^1} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{8}$$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{pro } t=0 \vee t=3 \\ \frac{3}{8} & \text{pro } t=1 \vee t=2 \end{cases}$$

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t<0 \\ \frac{1}{8} & \text{pro } t \in \langle 0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t \in \langle 1,2) \\ \frac{7}{8} & \text{pro } t \in \langle 2,3) \\ 1 & \text{pro } t \geq 3 \end{cases}$$