1. cx pro $x \in (0, 1)$,
2. cx pro $x \in (-1, 2)$,
3. $cx \sin x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
4. ce^x pro $x \in (0, \infty)$,
5. ce^{-x} pro $x \in (0, \infty)$,
6. $\frac{c}{1+x^2}$.

$a, b \in \mathbb{R}$
$a < b$

0. $f(x) = c$ pro $x \in \langle a, b \rangle$

$P(r \le X \le s) = \int_r^s f(x)\,dx$

$1 = P(-\infty < X < \infty) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$= \int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$\Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$

$f(x) \equiv c$ je hustota na $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$

$c = \frac{1}{b-a}$.

$X \sim Rs(a, b)$

rovnoměrné rozdělení spojité náh. vel.

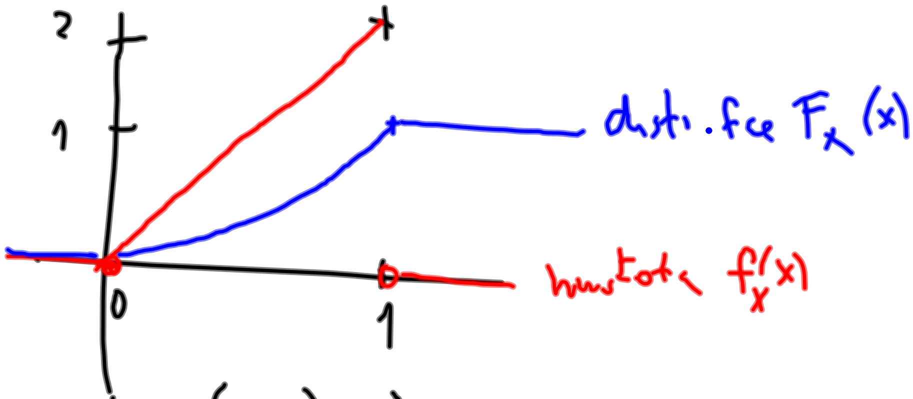
Distr. fce: $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\cdot(x-a) = \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 1 & \text{pro } x \ge b \end{cases}$$

1. $f(x) = c \cdot x$ pro $x \in (0,1)$

$c \geq 0$ (nezáp. hustoty)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 c \cdot x\,dx = c \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = c \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 2}}$$



2. $cX \geq 0 \quad \forall x \in (-1,2)$ je spor.

③ $f(x) = c\, x \sin x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x \cdot \sin x \geq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow c \geq 0.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c\, x \sin x \, dx = c \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= c\left(\left[-x \cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \right) = c \cdot \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

$f_X(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sin x$ je hustota na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

④ $f(x) = c \cdot e^{x} \quad x \in (0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^{\infty} e^{x}\,dx = c \cdot \left[e^{x}\right]_0^{\infty} = \begin{cases} 0 & \text{pro } c = 0 \\ \infty & \text{pro } c > 0. \end{cases}$$

NENÍ HUSTOTA

⑤ $f(x) = c \cdot e^{-x} \quad x \in (0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c \cdot \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = c \cdot \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = c \cdot (-0 + 1) = c$$

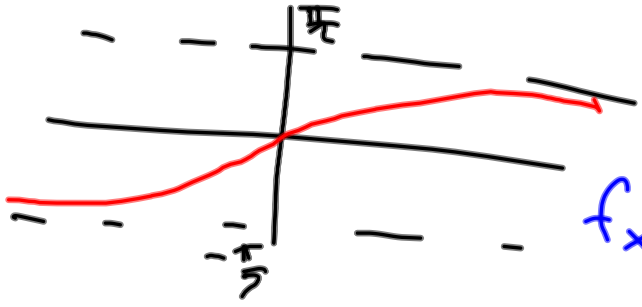
$\Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow f_X(x) = e^{-x}$ je hustota.

⑥ $f(x) = \frac{c}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot \frac{dx}{1+x^2} = c \cdot \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} = c \cdot \pi$$

$\Updownarrow$

$c = \frac{1}{\pi}$



$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

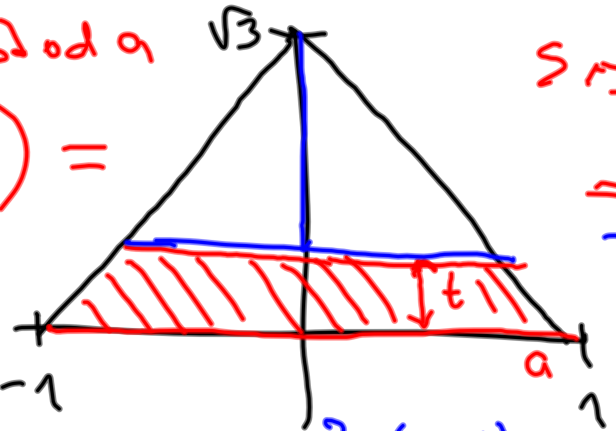
Příklad

V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech $(-1,0),(1,0)$ a $(0,\sqrt{3})$ se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete

1. rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,
2. rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližší strany lesa.

X.. vzdálenost od a

$P(X \le t) = \dfrac{S_{\text{lichoběžník}}}{S_\Delta}$



$S_{\text{lichoběžník}} = \dfrac{a+c}{2}\cdot v = \dfrac{2 + c_t}{2}\cdot t$

z podobnosti Δ plyne:

$\dfrac{\sqrt{3} - t}{\sqrt{3}} = \dfrac{c_t}{2}$

$c_t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - t)$

$F_X(t) = \dfrac{S_{\text{lichoběžník}}}{S_\Delta} = \dfrac{2t - \frac{t^2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}t - \dfrac{t^2}{3}$

pro $t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle$

kde

$S_{\text{lichoběžník}} = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - t)\right)\cdot t = \left(1 + 1 - \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)t = \left(2 - \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)t$

ad 2.

Příklady k procvičení

Příklad

V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina X nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a Y počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobností funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina X nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a Y počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobností funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

$$p(x,y) = P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{5}{y} \cdot \binom{3}{x-y} \cdot \binom{2}{2-x}}{\binom{10}{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in \{0,1,2\} \\ y \in \{0,1,2\} \\ x \geq y \end{array}}$$

X \ Y	0	1	2	
0	$p(0,0)$	0	0	$P(X=0)$
1	$p(1,0)$	$p(1,1)$	0	$P(X=1)$
2	$p(2,0)$	$p(2,1)$	$p(2,2)$	$P(X=2)$
	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$	1

Zřejmě nejsou nezávislé

Spojitý náhodný vektor (X, Y) má hustotu

$$f(x,y) = 24x^2y(1-x)$$

pro $0 \le x, y < 1$ a jinde nulovou. Dokažte, že X a Y jsou stochasticky nezávislé.

Marginální hustota:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 24x^2y(1-x)\,dy = 24x^2(1-x)\int_0^1 y\,dy = \underline{\underline{12x^2(1-x)}}$$ pro $x \in \langle 0,1)$, jinde 0.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 24x^2y(1-x)\,dx = 24y\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = 24y\cdot\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{2y}}$$ pro $y \in \langle 0,1)$, jinde 0

X, Y jsou stochasticky nezávislé, neboť $\underline{\underline{f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)}}$