Příklad

Nechť má X binomické rozdělení s parametry $n = 4, p = 2/3$. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = (X-2)^2$ a nakreslete graf její distribuční funkce.

$X \sim Bi(4, \frac{2}{3})$ $\quad P(X=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$

$k \in \{0,1,2,3,4\}$

obecně

$X \sim Bi(n,p): \cdot \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Pro $l \in \{0,1,4\}$ urči $P(Y=l)$:

$P(Y=0) = P((X-2)^2 = 0) = P(X=2) = \frac{24}{81}$

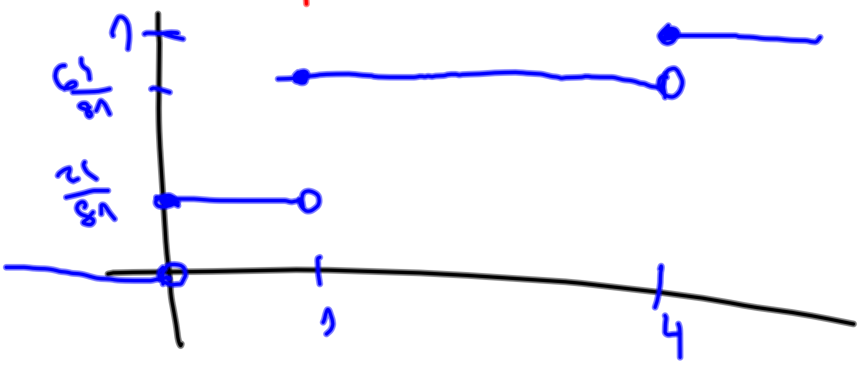
$P(Y=1) = P((X-2)^2 = 1) = P(|X-2| = 1) =$

$P(X \in \{1,3\}) = \binom{4}{1} \cdot \frac{2^1}{3^4} + \binom{4}{3} \cdot \frac{2^3}{3^4} = \frac{40}{81}$

$P(Y=4) = P((X-2)^2 = 4) = P(|X-2| = 2) =$

$= P(X \in \{0,4\}) = \binom{4}{0} \cdot \frac{2^0}{3^4} + \binom{4}{4} \cdot \frac{2^4}{3^4} = \frac{17}{81}$

Určili jsme pravděpodobnostní funkci



Příklad

Mějme náhodnou veličinu X hustoty $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x > 0$ (a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$.

Určím distr. fci $F_X(t) = P(X \leq t) =$

$$= \int_0^t f(x)\, dx$$

Pro $Y = X^2$ je $F_Y(t) = P(Y \leq t) =$

$$= P(X^2 \leq t) \overset{\text{pro } t \geq 0}{=\!=} P(|X| \leq \sqrt{t}) =$$

$$= P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \underbrace{P(-\sqrt{t} \leq X \leq 0)}_{=0}$$

$$+ P(0 < X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} 2x e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \\ x = 0 \to u = 0 \\ x = \sqrt{t} \to u = t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^t e^{-u}\, du = \left[-e^{-u} \right]_0^t = 1 - e^{-t}$$

Tedy $F_Y(t) = 1 - e^{-t}$, odkud $f_Y(t) =$

$$= (1 - e^{-t})' = e^{-t}.$$

Příklad

Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r\rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

$X \sim Rs(0,r)$, snadno $f_X(t) = \frac{1}{r}$

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{r}\,dx = \underline{\underline{\frac{t}{r}}}$$

$V = \frac{4}{3}\pi X^3$

$$F_V(d) = P(V \leq d) = P\left(\frac{4}{3}\pi X^3 \leq d\right) = P\left(X^3 \leq \frac{3}{4}\cdot\frac{d}{\pi}\right) = P\left(X \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{d}{\pi}}\right) = F_X\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{d}{\pi}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{d}{\pi}}}{r}$$

pro $d \in (0, \frac{4}{3}\pi r^3)$

Pro $x \in (0,r)$ je $d = \frac{4}{3}\pi x^3 \in (0, \frac{4}{3}\pi r^3)$

Dále $F_V(d) = 0$ pro $d \leq 0$

$F_V(d) = 1$ pro $d \geq \frac{4}{3}\pi r^3$

Dopočítáme hustotu: $F_V(d) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\cdot\frac{1}{r}\cdot d^{1/3}$

$$f_V(d) = F_V'(d) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{3}d^{-\frac{2}{3}}.$$

(pro $0 \leq d \leq \frac{4}{3}\pi r^3$, jinak 0)

Příklad (rozdělení $\chi^2(1)$)

Nechť Z má normované normální rozdělení. Určete hustotu transformované náhodné veličiny $X = Z^2$.

Řešení

Zřejmě je pro $x \leq 0$ distribuční funkce nulová, pro $x > 0$ dostáváme: $F_X(x) = P[Z^2 < x] = P[-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}] =$

souměrnost podle osy y (*)

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \,\mathrm{d}z = 2 \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t$$

a derivací podle x dostaneme hustotu $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
Rozdělení náhodné veličiny s touto hustotou se nazývá (Pearsonovo) χ^2 rozdělení s jedním stupněm volnosti a značí se $X \sim \chi^2(1)$.

subst. $t = z^2,\ dt = 2z\,dz$

$dz = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$z = 0 \rightarrow t = 0$

$z = \sqrt{x} \rightarrow t = x$

(*) $\displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Pro náhodné veličiny X_n s rozdělením $\mathrm{Bi}(n,p)$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left[a < \boxed{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}} < b\right] = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$\overset{\shortparallel}{Y_n}$

$X_n \sim Bi(n,p)$

$E(X_n) = n \cdot p$

$D(X_n) = n \cdot p(1-p)$

$\Rightarrow E(Y_n) = 0$

$D(Y_n) = 1$

$P(1800 \leq X_n \leq 2100) =$

$= P(1800 - \underset{np}{2000} \leq \underline{X_n - 2000} \leq 2100 - 2000)$

$= P\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \leq \underbrace{\frac{X_n - 2000}{\sqrt{- - - -}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{2100-2000}{\sqrt{- - -}}\right)$

$\approx \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{}}\right) - \Phi\left(\frac{-200}{\sqrt{}}\right) =$

$= \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6})$

12 4-16:51

Příklad

Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi tisíci novorozenci bude alespoň tolik děvčat jako chlapců?

X ... počet narozených chlapců z tisíce porodů

$X \sim Bi(1000;\ 0{,}515)$

$$P(X < 500) = P\Bigg(\underbrace{\frac{X - n\cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}}_{N(0;1)} < \frac{500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Bigg)$$

$$= \Phi\left(\frac{500 - 515}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485}}\right) = \ldots$$

pravděpodobnosti p a $1-p$. Parametr p chceme odhadnout pomocí *relativních četností* X_n/n (X_n je počet jedniček při n pokusech). Víme, že je $X_n \sim \mathrm{Bi}(n,p)$, proto nám Moivre-Laplaceova věta umožní určit počet pokusů n potřebný k zajištění požadované přesnosti odhadu δ se spolehlivostí $1-\beta$.

$X_n \sim Bi(n, p)$, nezname

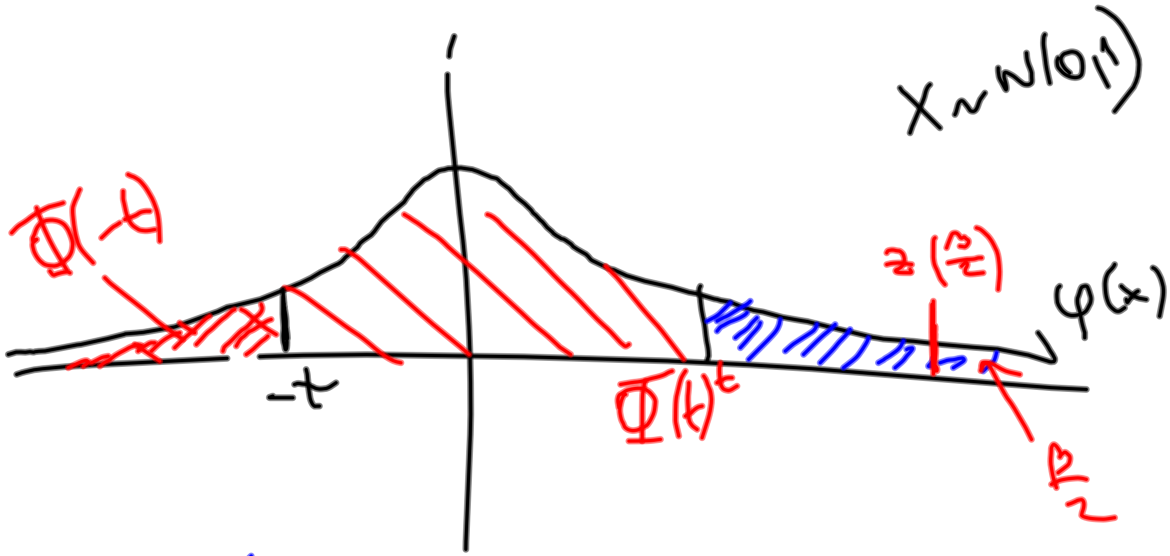
$$P\left(-\delta < \frac{X_n}{n} - p < \delta\right) \geq 1-\beta$$

Víme (Moivre-Laplace):

$$P\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$-\frac{\delta n}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\delta n}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Jak se počítá s Φ?



$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

aproximovat nerovností

$$\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 1 - \beta.$$

Ta je ekvivalentní s podmínkou $n\delta/\sqrt{np(1-p)} \geq z(\beta/2)$, kde $z(p)$ je řešení rovnice $\Phi(z(p)) = 1 - p$ (tzv. *kritická hodnota* normovaného normálního rozdělení).

$$\Phi\left(\underline{\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}}\right) \geq 1 - \frac{\beta}{2}$$

Příklad

Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,1. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 99% alespoň 60 bezvadných konzerv. (Předpokládejte, že konzervy jsou vydávány náhodně).

$X_n \sim Bi(n; 0{,}9)$ Jaké má být n, aby $P(X_n \geq 60) = 0{,}99$

$$0{,}99 = P(X_n \geq 60) \Leftrightarrow 0{,}01 = P(X_n < 60)$$

$$= P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{60-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= P\Bigg(\underbrace{\frac{X_n - 0{,}9n}{0{,}3\cdot\sqrt{n}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{60-0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\Bigg)$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{60-0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = 0{,}01 \qquad \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0{,}9n-60}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}9n-60}{0{,}3\sqrt{n}} = 2{,}33$$

$$0{,}9n - 60 = 0{,}7\sqrt{n} \qquad k = \sqrt{n}$$

$$0{,}9k^2 - 60 = 0{,}7k$$

$$9k^2 - 7k - 600 = 0 \qquad D = 49 + 36\cdot 600$$

$$k \doteq 8{,}56 \Rightarrow n = k^2 = 73{,}27.$$

Důstojník vezme aspoň 74 konzerv.

12 4-17:17

Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$ je

$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} p^{j}(1-p)^{n-1-j} = \\
&= np(p+(1-p))^{n-1} = np.
\end{aligned}
$$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Dk: $DX = E\left((X - EX)^2\right) =$

$= E\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot EX + (EX)^2\right) =$

$= E(X^2) - 2 \cdot EX \cdot E(X) + (EX)^2$

$= E(X^2) - 2 \cdot (EX)^2 + (EX)^2$

$= E(X^2) - (EX)^2.$

12 4-17:35