Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } x = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

x	$2x+5$	x^2
-2	1	4
3	11	9
1	7	1

Určete $E(X)$, $E(2X+5)$, $E(X^2)$, $D(X)$ a $D(2X+1)$.

$$E(X) = \frac{1}{3}\cdot(-2) + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 1 = 1$$

$$E(2X+5) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 11 + \frac{1}{6}\cdot 7 = 7$$

lépe: $E(2X+5) = 2\cdot E(X) + 5 = 7$

$$E(X^2) = \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 9 + \frac{1}{6}\cdot 1 = 6$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 1^2 = 5$$

$$D(2X+1) = 2^2\cdot D(X) = 20$$

Příklad

Nekorelované náhodné veličiny X a Y mají rozptyly $D(X) = a$ a $D(Y) = 2$. Určete konstantu a, jestliže rozptyl náhodné veličiny $Z = 3Y - X$ je $D(Z) = 25$.

$$\underset{25}{\underset{\shortparallel}{D(3Y - X)}} \overset{\uparrow}{=} D(3Y) + D(-X) = 3^2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot a$$

za předp. $C(3Y, -X) = 0$

$$\Rightarrow 25 = 18 + a \Rightarrow \underline{\underline{a = 7}}$$

$$C(3Y, -X) = 3 \cdot (-1) \cdot C(Y, X) = -3 \cdot C(X, Y) = 0$$

Y_n

Všimněme si, že výraz $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ vystupující v Moivre-Laplaceově větě je totéž, co $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}}$ a jde tedy o tzv. **normovanou** náhodnou veličinu (tj. veličinu lineárně transformovanou tak, aby měla střední hodnotu 0 a rozptyl 1). Moivre-Laplaceova věta pak říká, že pro $n \to \infty$ se rozložení této náhodné veličiny blíží

$$E(Y_n) = E\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(X_n)}} E(X_n - E(X_n)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(X_n)}} \left(E(X_n) - E(X_n)\right) = 0$$

$$D(Y_n) = D\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}}\right) = \frac{1}{D(X_n)} \cdot D(X_n) = 1$$

$X \sim N(0,1)$

Buďte A a X nezávislé náhodné veličiny, splňující $X \sim N(0$
$P(A = 1) = P(A = -1) = 1/2$. Položíme-li $Y = AX$, pak

$$P(Y < y) = \frac{1}{2}P(\underset{\Phi(y)}{X < y}) + \frac{1}{2}P(\underset{P(X > -y)}{-X < y}) = \Phi(y),$$

proto má rovněž Y rozdělení $N(0, 1)$.

$1 - \Phi(-y) = \Phi(y)$

12 11-16:37

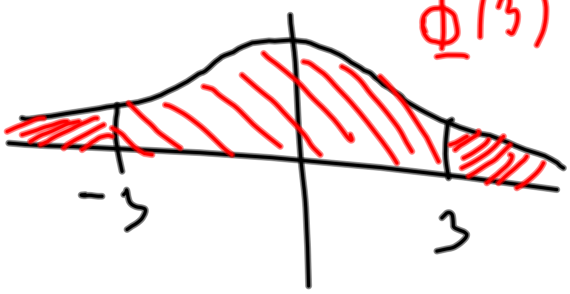
$$P(|X-0| \geq 3\cdot 1) = P(|X| \geq 3) =$$

$$= P(X \leq -3 \vee X \geq 3) =$$

$X \sim N(0,1)$

$$= 1 - P(-3 < X < 3) =$$

$$= 2 - 2\Phi(3) = 0{,}0027$$



$$\Phi(3) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) =$$

$$= 2\Phi(3) - 1$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < t) = \Phi(t),$$

kde Φ je distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$.

$Y_i' = \frac{Y_i - \mu}{\sigma}$ $\quad E(Y_i') = 0$

$D(Y_i') = 1$

$E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i'\right) = \sum E(Y_i') = 0$

$D\left(\sum Y_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} D(Y_i') = n \cdot 1 = n$

Normujeme $\sum Y_i'$: $S_n = \frac{\sum Y_i' - 0}{\sqrt{n}}$

Příklad

Mezi učiteli matematiky v ČR je jich 10% s příjmem přesahujícím celostátní průměr. Kolik matematiků je třeba pozvat na konferenci, aby s pravděpodobností aspoň 0,95 mezi nimi bylo 8 až 12 procent s nadprůměrným příjmem?

Řešení

$Y_n \sim \mathrm{Bi}(n; 0{,}1)$, $E(Y_n) = 0{,}1 \cdot n$, $D(Y_n) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot n$. Pak

$$0{,}95 \leq P(0{,}08n \leq Y_n \leq 0{,}12n) =$$
$$= P\left(\frac{0{,}08 - 0{,}1}{\sqrt{0{,}09n}} n \leq \frac{Y_n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \leq \frac{0{,}12 - 0{,}1}{\sqrt{0{,}09n}} n\right) =$$
$$= P\left(\frac{-\sqrt{n}}{15} \leq \frac{Y_n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{15}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right).$$

Je tedy $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \geq 0{,}975$, což je ekvivalentní $\sqrt{n}/15 \geq 1{,}96$, tj. $n \geq 865$.

$$0{,}95 \leq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right) =$$
$$= 2\,\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1 \iff 0{,}975 \leq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right)$$
$$\iff \frac{\sqrt{n}}{15} \geq 1{,}96 \iff \underline{\underline{n \geq 865}}$$

Tento příklad je možné řešit několika způsoby, my (neformálně) naznačíme postup pomocí integrace funkce dvou proměnných přechodem k polárním souřadnicím. Dvěma způsoby tak spočítáme

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\, dA \quad \text{pro} \quad A = \mathbb{R}^2,$$

odkud porovnáním dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx}_{I} \Big)\, dy = I^2$$

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = \left| \begin{matrix} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{matrix} \right| =$$

$$= \underline{\underline{\pi}} \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad\quad$ $\cancel{Z} \sim N(0,1)$

$X = \mu + \sigma \cdot Z$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\quad\quad$ $f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

$t := \frac{x-\mu}{\sigma}$

12 11-17:21

Snadno se odvodí, že platí

$$\sum (X_i - \mu)^2 = \sum (X_i - M)^2 + n(M - \mu)^2.$$

Proto je

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum (X_i - \mu)^2\right) - \frac{n}{n-1} E(M - \mu)^2 =$$
$$= \frac{1}{n-1} \sum D(X_i) - \frac{n}{n-1} D(M) =$$
$$= \frac{n}{n-1}\sigma^2 - \frac{1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2.$$

$-2\mu \cancel{n} \cdot M$

□

$$\sum (X_i - \mu)^2 = \cancel{\sum X_i^2} - 2\sum X_i \mu + \sum \cancel{\mu^2}$$

$2 M n \cdot M$

$$\sum (X_i - M)^2 + n(M - \mu)^2 = \cancel{\sum X_i^2} - 2\sum X_i M + \sum M^2 + \cancel{nM^2} - 2nM\mu + n\cancel{\mu^2}$$