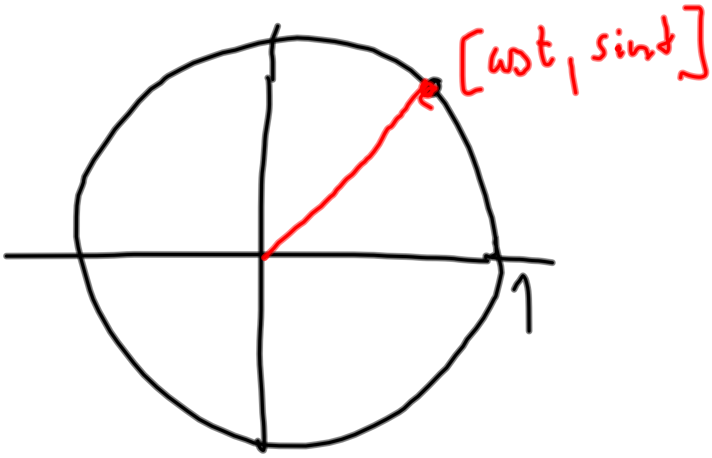
9 25-15:56




$t \in \langle 0, 2\pi)$ ... obraz $S^1$ ... jedn. kružnice

$t \in \mathbb{R}$ — " —

$t \longmapsto (\cos t^3, \sin t^3)$ „obíháme rychleji"

$\neq \cos^3 t$

3× rychleji: je $t \mapsto (\cos(3t), \sin(3t))$

Určete tečnu křivky dané předpisem

$$f(t) = (2\cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

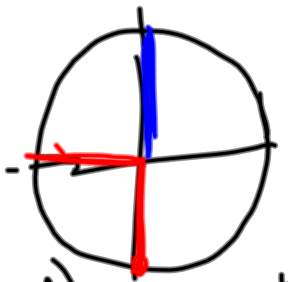
v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

$f'(t) = (-2\sin t - \sin 3t \cdot 3, 2\cos 2t, 1)$

$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (2 - 3, -2, 1) = (-1, -2, 1)$

tečna:

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(0, 0, \frac{3\pi}{2}\right)$



$\left(0, 0, \frac{3\pi}{2}\right) + \tau \cdot (-1, -2, 1) \quad \tau \in \mathbb{R}$

## Příklad

Na křivce $f(t) = (t, t^2, t^3)$ najděte takový bod, že jím procházejíc tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 1$. $(\varrho)$

tečný vektor je $f'(t) = (1, 2t, 3t^2)$

normálový vektor $\varrho$: $(1,2,1)$

Chceme, aby byl kolmý s tečným vektorem ke křivce:

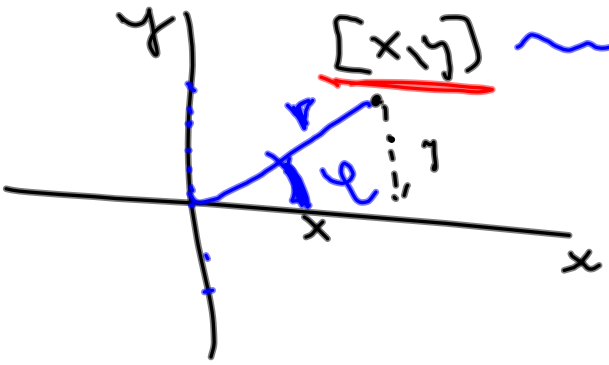
$$0 = (1,2,1)\cdot(1,2t,3t^2) = 1 + 4t + 3t^2$$

$$0 = (1+3t)(1+t) \Leftrightarrow t_1 = -1 \vee t_2 = -\frac{1}{3}$$

$$f(t_1) = f(-1) = (-1, 1, -1)$$

$$f(t_2) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$$

# Polární souřadnice




$[x, y] \rightsquigarrow [r; \varphi]$

$\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

(příp. $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$)

$P \Rightarrow K$: $x = r \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$K \Rightarrow P$: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (pro $x \neq 0$)

pro $x = 0$ je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, resp. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

kružnice $\{[x,y];\ x^2+y^2=1\}$

$\{[r,\varphi];\ r=1\}$

## Funkce více proměnných

$f: E_n \to R$ ; $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

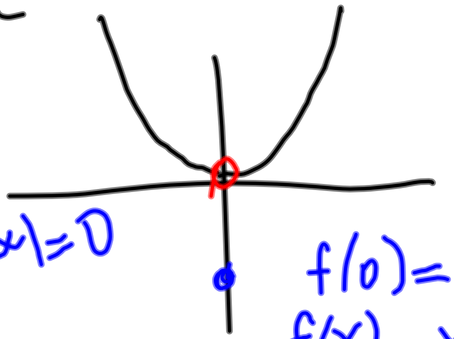
$f(x,y,z) = \dots$

fce jedné proměnné:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v $x_0$ limitu $L$ (tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$), pokud:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$

platí $|f(x) - L| < \varepsilon$



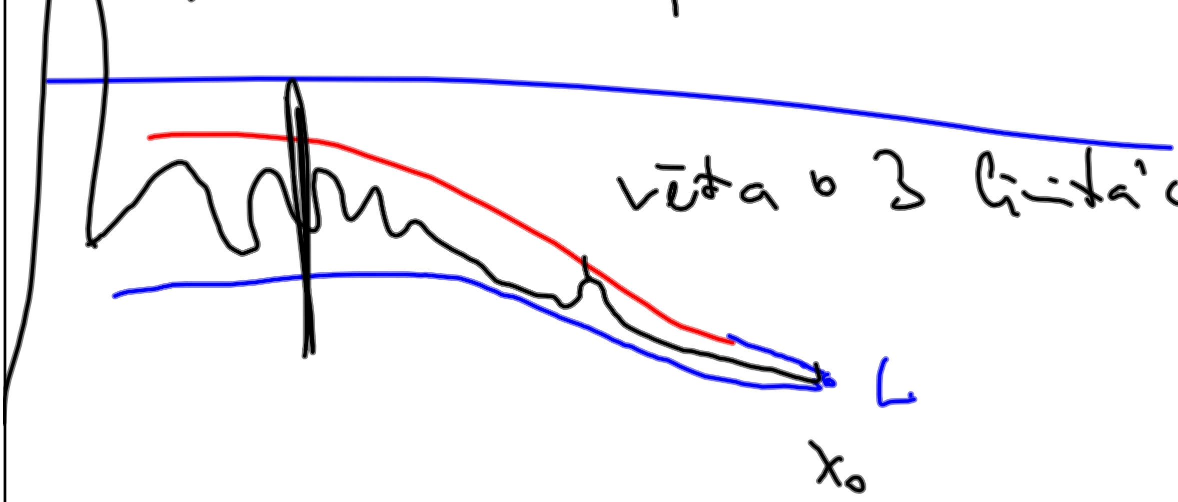
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$f(0) = -2$

$f(x) = x^2$ pro $x \neq 0$

Limita funkce f $L$ existuje $\iff$ pro lib. posloupnost bodů $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$

$x_k \to x_0$ platí $f(x_k) \to L$




9 25-16:38

## Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ v bodě $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x+y)}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}}_{\text{je ohraničená v nějaké okolí } (0,0)} = 0$$

$$\ne$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}$$

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq 1$$

$\forall x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

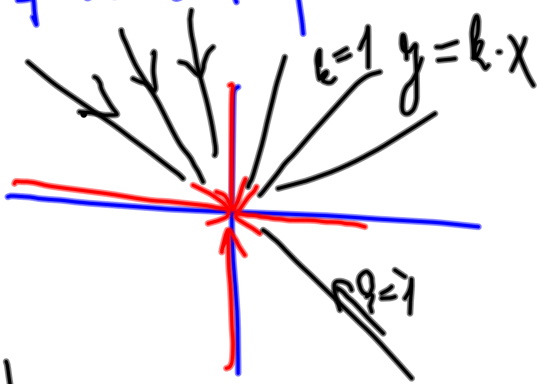
## Příklad

Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $(0,0)$.

POZOR!

• $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

• stejně tak v opačném pořadí




$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$ závisí na k

$\Rightarrow$ limita neexistuje

## Příklad

Vypočtěte limity nebo dokažte jejich neexistenci.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$, $= \lim \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\to 1} \cdot y = 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$,

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

b) pol. súradnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$(x,y)\to(\infty,\infty)$ tj. $r\to\infty$, $\varphi\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$

$$\lim = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varphi\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}} \frac{r^2}{e^{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}} = *)$$

$1 \leq \cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$$*) \leq \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varphi}} \frac{r^2}{e^{r\cdot 1}} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{e^r} = 0$$

Odtud: hledaná limita je $\underline{0}$.

9 25-17:06

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}$$

po přímkách

$$y-1=k(x-2)$$

c) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}} e^{\frac{x}{x+y}} = e$

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

d) pol. souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{1-\cos(r^2)}{r^2\cdot r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r^2)}{r^4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = \lim_{s\to 0}\frac{(1-\cos s)2}{s^2\sin 2\varphi} \overset{l'H}{=} \lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{2s}\cdot\frac{2}{\sin 2\varphi} =$$

$[s = r^2]$

$$= \frac{1}{\sin 2\varphi}$$ závisí na $\varphi$

$\Rightarrow \lim$ neexistuje

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | derivace $f$ v $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$$

**Definice**

Existuje-li limita $\quad g(x) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x, \dots, x_n^*)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left( f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^* + t, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*) \right),$$

$$= g'(x_i^*)$$

říkáme, že funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ *parciální derivaci podle proměnné* $x_i$ a značíme $f_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)$).

Příklad

Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$$

mimo počátek a $f(0,0)=0$, má v počátku všechny směrové derivace nulové, přitom zde není spojitá (neboť při konvergenci „po různých parabolách“ dostáváme různé limity).

a) není spojitá (není limita v $(0,0)$)

„konvergovat po parabolách“ $y = k\cdot x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^8}{x^8(1+k^4)} = \frac{k^2}{1+k^4}$$

závisí na $k$

$\Rightarrow$ neex. limita

b) $$d_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\cdot v_1, 0+t\cdot v_2) - f(0,0)}{t}$$

$$\boxed{v=(v_1,v_2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^4v_1^4\cdot t^2v_2^2}{t(t^8v_1^8+t^4v_2^4)} = \dots = \underline{\underline{0}}$$