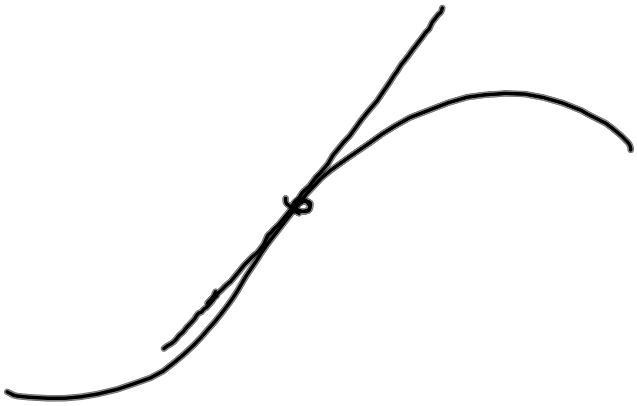


1 proměnné: derivace $\Rightarrow$ spojitost

více proměnných: $\forall$ parciální $\not\Rightarrow$ spojitost

$\forall$ směrové

(totální) diferenciál $\Rightarrow$ spojitost

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ v bodě $[-1, 1]$ ve směru vektoru $(1, 2)$.

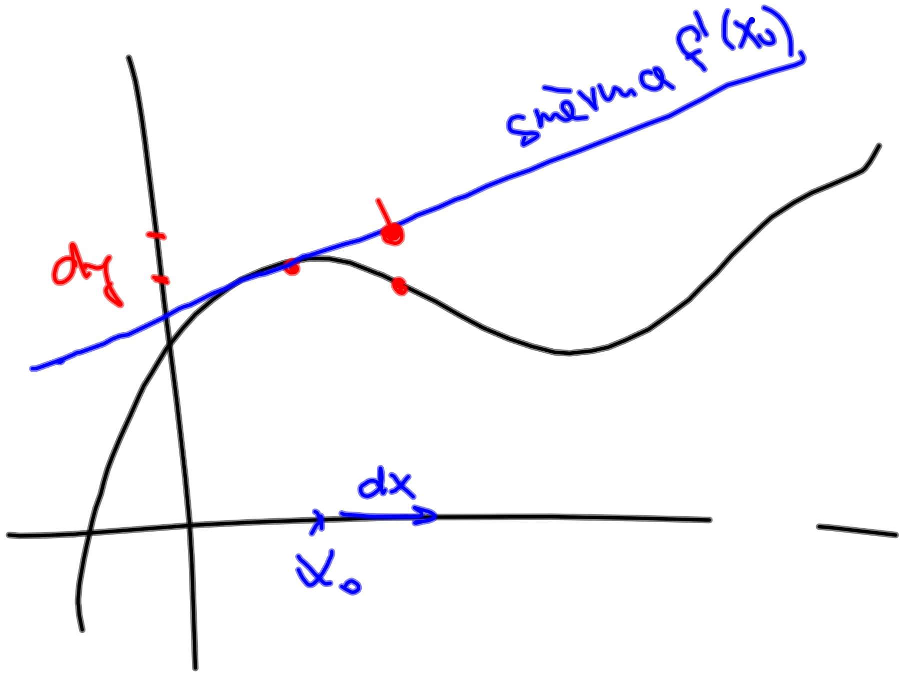
$$f'_{(1,2)}(-1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(-1+t\cdot 1,\, 1+t\cdot 2) - f(-1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left((t-1)^2 + (2t+1)^2\right) - \operatorname{arctg} 2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(5t^2 + 2t + 2) - \operatorname{arctg} 2}{t} \overset{l'H}{=}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{1+(\cdots)^2} \cdot (10t+2)}{1} = \lim_{t \to 0} \frac{10t+2}{1+(5t^2+2t+2)^2}$$

$$= \frac{2}{5}.$$



$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Příklad

Přímo z definice určete df a funkci τ pro $f(x,y) = x^2 + y^2$ v obecném bodě $[x^*, y^*]$.

Řešení

Kvůli přehlednosti označme $h := \mathrm{d}x$, $k := \mathrm{d}y$. Pak

$$
\begin{aligned}
f(x^* + \mathrm{d}x, y^* + \mathrm{d}y) - f(x^*, y^*) &= \\
&= (x^* + h)^2 + (y^* + k)^2 - (x^*)^2 - (y^*)^2 = \\
&= 2x^*h + 2y^*h + h^2 + k^2.
\end{aligned}
$$

Odtud $\mathrm{d}f(x^*, y^*)(h, k) = 2x^* \cdot h + 2y^* \cdot k$ a $\boxed{\tau(h,k) = h^2 + k^2.}$

$a = (2x^*, 2y^*)$; přitom $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to 0} \sqrt{h^2+k^2} = 0$

Věta

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál $\mathrm{d}f$ v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

f diferencovatelná

$\Downarrow$

f má derivaci ve všech směrech

$\Downarrow$

f má všechny parciální derivace

spojité v okolí x

Diferenciál – shrnutí

Funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$ je tedy *diferencovatelná v bodě* x, jestliže existuje vektor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že pro všechny „směry" $v \in \mathbb{R}^n$ platí

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $v \mapsto d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}(f(x+v) - f(x) - d_v f(x))$,
   tj. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}(f(x+v) - f(x) - a \cdot v)$.

víme: $k \cdot v \mapsto k \cdot d_v f(x)$ $[= d_{k \cdot v} f(x)]$

ALE: $d_{u+v} f(x) = d_u f(x) + d_v f(x)$

Příklad

Určete diferenciál v daném bodě:

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ v bodě $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $[1, \sqrt{3}]$.

a) $f'_x(x,y) = y + \frac{1}{y}$

$f'_y(x,y) = x - \frac{x}{y^2}$

$\Big\}$ v okolí $[1,1]$ spojité

$f'_x(1,1) = 2$

$f'_y(1,1) = 0$

$$\Rightarrow df_{(1,1)} : (dx,dy) \mapsto 2\cdot dx + 0\cdot dy$$

b) $$f'_x(x,y) = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} =$$

$$\left[\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)\right]$$

$$= \frac{\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$f'_x(1,\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$f'_y(x,y) = \dots = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$f'_y(1,\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$

Diferenciál f v $[1,\sqrt{3}]$ je:

$$(dx,dy) \mapsto \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot dx - \frac{1}{4}\cdot dy$$

Příklad

Spočtěme znovu jednodušeji dřívější příklad a určeme směrovou derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ v bodě $[-1,1]$ ve směru vektoru $(1,2)$ pomocí diferenciálu.

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} \qquad f'_x(-1,1) = -\frac{2}{5}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} \qquad f'_y(-1,1) = \frac{2}{5}$$

$$df(-1,1): \quad (dx,dy) \mapsto \left(-\frac{2}{5}\right)dx + \frac{2}{5}dy$$

směr. derivace pro $v = (1,2)$ je

$$df_{(1,2)}(-1,1) = df(-1,1)(1,2) = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5}$$

Příklad

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$,

b) $1{,}04^{2{,}02}$.

v bodě $[\frac{1}{2}, 1]$

dif. $(-0{,}02; 0{,}05)$

a) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{y}$

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \qquad f'_x(\tfrac{1}{2},1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\cancel{y}}{\sqrt{y^2-x^2}} \cdot -\frac{x}{y^{\cancel{2}}}$$

$$= -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} \qquad f'_y(\tfrac{1}{2},1) = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$df(\tfrac{1}{2},1): \quad (dx,dy) \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}dx - \frac{1}{\sqrt{3}}dy$$

$$(-0{,}02, 0{,}05) \mapsto \frac{1}{100}\left(-\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{100}$$

$$\arcsin \frac{0{,}45}{1{,}05} \doteq \arcsin \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{100} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{100}$$

b) $1{,}04^{2{,}02} \doteq ?$ $[1,2]$

$f(x,y) = x^y$

$f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$

$f'_y(x,y) = x^y \cdot \ln x$

$f'_x(1,2) = 2$

$f'_y(1,2) = 0$

$1{,}04^{2{,}02} \doteq 1^2 + 2 \cdot (0{,}04) + 0 \cdot (0{,}02) =$

$= 1{,}08$

Příklad

Určete rovnici tečné nadroviny ke grafu funkce v daném bodě

a) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 4]$,

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad [x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$.

a) $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$f'_x(x,y) = 2x + y \qquad f'_x(1,1) = 3$

$f'_y(x,y) = x + 4y \qquad f'_y(1,1) = 5$

$z = 4 + 3 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - 1)$

b) anal. $\sim [1, -1, -\frac{\pi}{4}]$

$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$z + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y + 1)$

$x + y + 2z = -\frac{\pi}{2}$.

10 2-17:15