Příklady k procvičení

Příklad

a) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ v bodě $[1, 1]$ a přibližně vypočtěte hodnotu $f(1{,}1; 1{,}2)$.

b) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f(x, y) = \sin x \operatorname{tg} y$ v bodě $[30^\circ, 45^\circ]$ a přibližně vypočtěte hodnotu $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$.

Příklad

a) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ v bodě $[1,1]$ a přibližně vypočtěte hodnotu $f(1{,}1; 1{,}2)$.

b) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f(x,y) = \sin x \operatorname{tg} y$ v bodě $[30°, 45°]$ a přibližně vypočtěte hodnotu $\sin 29° \operatorname{tg} 46°$.

a) $f'_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2(y^2-x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \overset{\text{sym.}}{\ldots} = \frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \frac{-2x(2y)}{(x^2+y^2+1)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$\Rightarrow$ Hessián

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$f'_x(1,1) = \frac{2}{3} \quad f'_y(1,1) = \frac{2}{3}$$

$$T_{2,[1,1]}(x,y) = f(1,1) + \left(f'_x(1,1), f'_y(1,1)\right)\cdot(x-1, y-1) + \frac{1}{2!}(x-1,y-1)\cdot Hf(1,1)\cdot(x-1,y-1)^T$$

$$= \ln 3 + \frac{2}{3}\cdot(x-1) + \frac{2}{3}\cdot(y-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\left(2(x-1)^2 + 2\cdot(-4)\cdot(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2\right).$$

Aproximace $f(1{,}1; 1{,}2)$

$$T_{2,[1,1]}(1{,}1; 1{,}2) = \ln 3 + \frac{2}{3}(0{,}1+0{,}2) + \frac{1}{18}\left(2\cdot(0{,}1)^2 - 8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}2^2\right)$$

$$= \ln 3 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}3 + \frac{1}{18}\cdot(-3\cdot 0{,}02) \doteq$$

$$\doteq \ln 3 + 0{,}2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}01$$

b) Napište Taylorův rozvoj druhého řádu funkce $f(x,y) = \sin x \operatorname{tg} y$ v bodě $[30°, 45°]$ a přibližně vypočtěte hodnotu $\sin 29° \operatorname{tg} 46°$.

převedeme na radiány (oblouk. míra)

$$[x_0, y_0] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$f'_x(x;y) = \cos x \cdot \operatorname{tg} y \qquad f'_x(x_0,y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_y(x,y) = \sin x \cdot \left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)'_y = \sin x \cdot \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} =$$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \qquad f'_y(x_0,y_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$f''_{xx}(x;y) = -\sin x \cdot \operatorname{tg} y \qquad f''_{xx}(x_0,y_0) = -\frac{1}{2}.$$

$$f''_{yy}(x;y) = \sin x \cdot \left[(\cos y)^{-2}\right]'_y = \sin x \cdot (-2)(\cos y)^{-3} \cdot (-\sin y)$$

$$= \frac{2 \sin x \sin y}{(\cos y)^3} \qquad f''_{yy}(x_0,y_0) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = 2$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\cos x}{\cos^2 y} \qquad f''_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$T_{2,\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}, y - \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \left(x - \frac{\pi}{6}, y - \frac{\pi}{4}\right)^T$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

$$\sin 29° \operatorname{tg} 46° = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\doteq 0{,}4973$$

10 9-16:27

$$(x,y)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

Matice kvadratické formy

$$= (ax+by,\, bx+dy)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

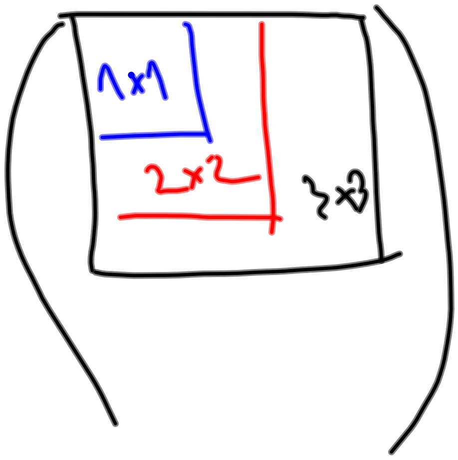
$$= \underbrace{ax^2+2bxy+dy^2}_{\text{kvadr. forma}}$$

kv. forma, resp. matice je pozitivně definitní, je-li $\forall (x,y) \neq (0,0)$:

$ax^2+2bxy+dy^2 > 0$ Např. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10 9-16:19

hlavní minor (Sylvester)



$$\begin{pmatrix} \boxed{a} & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

poz. def.
$\Leftrightarrow a > 0$
$\wedge \; ad - b^2 > 0$

neg. def. $\Leftrightarrow a < 0 \wedge ad - b^2 > 0$

např. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou *různé* parity a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko $+$ nastává, když k a ℓ jsou různé parity a naopak pro $-$.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = (-1)^k$

   $\cos(\ell\pi) = (-1)^\ell$

10 9-17:11

Příklad

Určete stacionární body funkce
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + y^2x - xy$ a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy a jakého druhu.

$$f'_x(x,y) = 2xy + y^2 - y = 0$$
$$f'_y(x,y) = x^2 + 2yx - x = 0$$

viz MAW

10 9-17:18

První derivace:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2 + 2xy - y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy + x^2 - x$$

Druhé derivace:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2y + 2x - 1$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = 2x$$

Hessián: $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2y & 2y+2x-1 \\ 2y+2x-1 & 2x \end{vmatrix}$

	$S_1 = [0,0]$	$S_2 = [0,1]$	$S_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$	$S_4 = [1,0]$
f''_{xx}	0	2	$\frac{2}{3}$	0
f''_{xy}	-1	1	$\frac{1}{3}$	1
f''_{yy}	0	0	$\frac{2}{3}$	2
Hessián	-1	-1	$\frac{1}{3}$	-1
Závěr:	sedlo	sedlo	minimum	sedlo

S_1: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ indef

není extrém

S_2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta = -1$ indef.

S_4: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ indef.

$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

10 9-17:23

Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je dána trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

body nespojitosti NEJSOU

body, kde není dif. NEJSOU

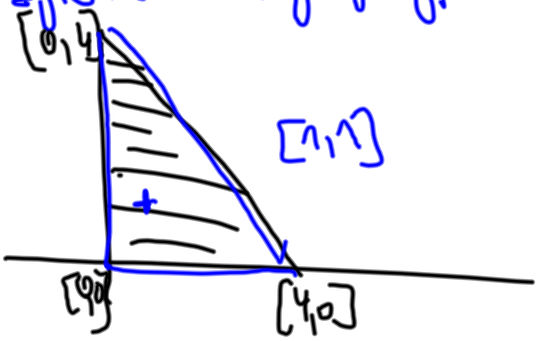
stac. body:

$$f'_x(x,y) = y - 2x + 1 = 0$$
$$f'_y(x,y) = x - 2y + 1 = 0$$

$[1,1]$

nemusíme zjišťovat o jaký typ extrému jde.

hranice:



$\underline{x=0}$: $f_0(y) = f(0,y) = -y^2 + y \quad y \in \langle 0,4 \rangle$

$\underline{y=0}$: $f_1(x) = f(x,0) = x - x^2 \quad x \in \langle 0,4 \rangle$

$\underline{x+y=4}$: $f_M(x) = -12 + 3x(4-x) \quad x \in \langle 0,4 \rangle$

$y = 4 - x$ [úprava $f(x,y) = -(x+y)^2 + 3xy + (x+y)$]

f_0 ... stac. bod $(-y^2+y)' = 0 \iff y = \frac{1}{2}$

f_1 " " — $\iff x = \frac{1}{2}$

f_M ... $12 - 6x = 0 \iff x = 2$

ABS. MAX.

Podezřelé: $\boxed{[1,1]}$, $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},0]$, $[2,2]$

$1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0$

$[0,0]$, $\boxed{[0,4]}$, $\boxed{[4,0]}$ — ABS. MIN.

$0 \quad -12 \quad -12$