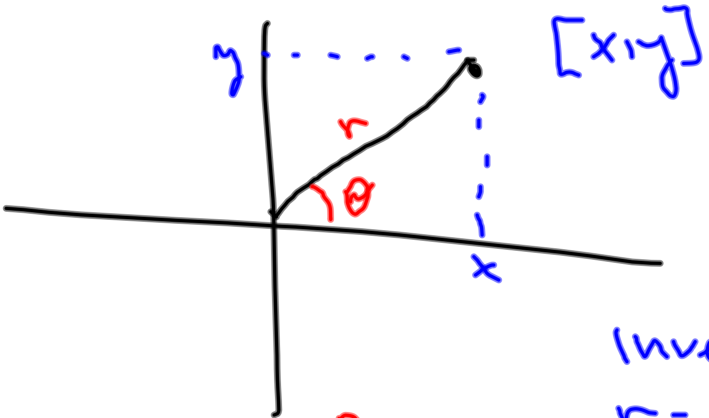


$r \in \langle 0, \infty)$

$\Theta \in (-\pi, \pi\rangle$

$x = r \cdot \cos\Theta$

$y = r \sin\Theta$

$F: E_2 \to E_2$

$[r, \Theta] \mapsto [r\cos\Theta, r\sin\Theta]$

inverze

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ pro $x \neq 0$

$x = 0$

$r = |y|$

$\Theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0 \end{cases}$

$g(r,\varphi) = \sin(r - t)$

Chceme-li vypočítat derivaci funkce zadané parametricky v kartézských souřadnicích, využijeme větu o derivaci složeného zobrazení $g \circ F : E_2 \to \mathbb{R}$:

F: kartézské $\Rightarrow$ polární

$$D^1(g \circ F)(x) = D^1 g(F(x)) \circ D^1 F(x) =$$

vnější — vnitřní složka

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$r = r(x,y)$

$\varphi = \varphi(x,y)$

$\cos(r-t)$ $\quad (\sqrt{x^2+y^2})'_x$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

$0 \cdot (\operatorname{arctg} \frac{y}{x})'_x$

Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,t) = \cos(\sqrt{x^2+y^2} - t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0$$

a podobně

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,t) = \cos(\sqrt{x^2+y^2} - t)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$y = f^{-1}(x) \longrightarrow x = f(y)$$

$$dx = f'(y)\,dy$$

$$\boxed{dy = \frac{dx}{f'(y)}}$$

$$dy = \frac{dx}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

1) inv. k e^x

$y = \ln x \longleftrightarrow \underline{x = e^y}$ $\quad x = f(y)$

$dx = e^y \cdot dy \quad f(y) = e^y$

$dy = \frac{1}{e^y} \cdot dx$

$dy = \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$

2) inv. k $\sin x$ (na $(0, \frac{\pi}{2})$)

$y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y$

$dy = \frac{1}{\cos y} dx \longleftarrow dx = \cos y \, dy$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Příklad

Rozhodněte, zda zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované po souřadnicích

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$$

je prosté v okolí bodu [2, 1]. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$. $= (2,2)$

Prosté? Získáme jako důsledek výpočtu Jacobiho matice

$$D^1 F(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Matice je invertibilní v $(2,1)$, tj. ex. inverzní matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow F$ je prosté v (nějakém) okolí $(2,1)$.

$$D^1 F^{-1}(2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

POZN: Zobrazení F není prosté v okolí bodu, pro nějž $D^1 F(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$ není invertibilní, tj. $\det D^1 F(x,y) = -\frac{2x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Příklad

Spočítejte jacobián zobrazení F, které je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.

$$F(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) \qquad G = F^{-1}$$

$$G(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

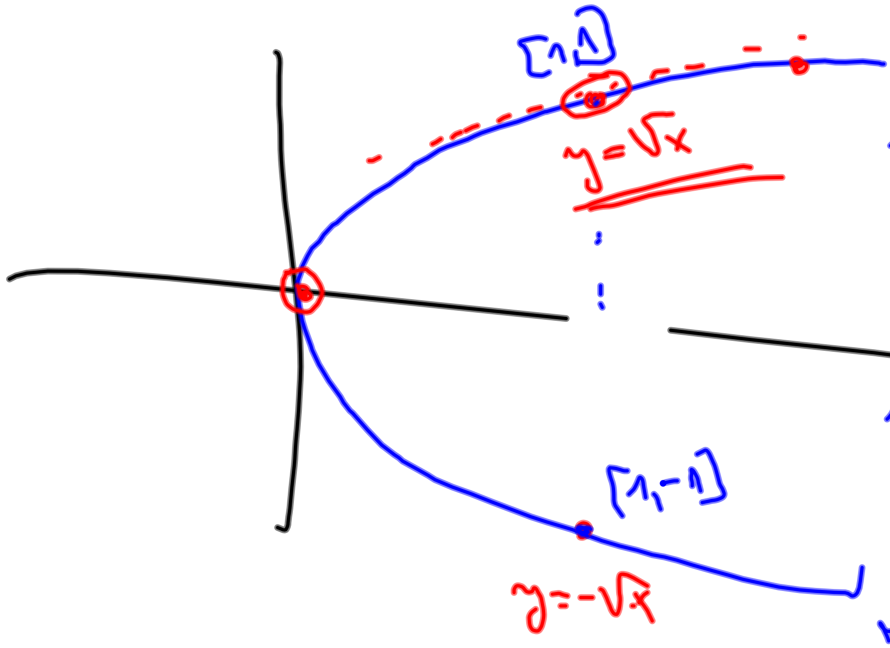
$$D^1 G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det D^1 G(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$D^1 F(x,y) = D^1 G^{-1}(x,y) = \left[D^1 G\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right| = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$



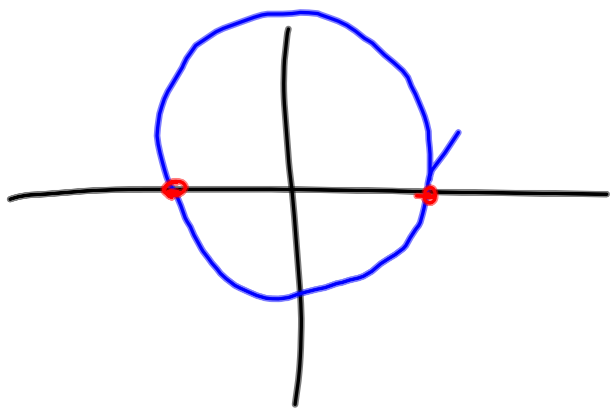
$$y^2 = x$$

$$2y\cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{2y}$$

$$y'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y'(1,-1) = -\frac{1}{2}$$



$$x^2+y^2=1$$

$$F(x,y)=0$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{dF} = F'_x + F'_y \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$2x + 2z \cdot z_x - z - x \cdot z_x - \sqrt{2} y z_x = 0$$
$$2y + 2z \cdot z_y - x \cdot z_y - \sqrt{2} z - \sqrt{2} y z_y = 0, \qquad (*)$$

stac. body $\quad z_x = 0 \qquad z_y = 0$

$2x - z = 0 \qquad z = 2x$

$2y - \sqrt{2}z = 0 \qquad z = \sqrt{2}y \Rightarrow y = \sqrt{2}x$

Dosadíme:

$x^2 + 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 - 4x^2 = 1$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1 \qquad [1, \sqrt{2}, 2]$

$[-1, -\sqrt{2}, -2]$

Druhé derivace:

derivací $(*)$:

$2 + 2z'_x \cdot z'_x + 2z \cdot z''_{xx} - z'_x - z'_x - x \cdot z''_{xx} - \sqrt{2}y \cdot z''_{xx} = 0$

$z'_x = 0$; $\quad 2 + 2z \cdot z''_{xx} - x \cdot z''_{xx} - \sqrt{2}y \cdot z''_{xx} = 0$

$z''_{xx}(2z - x - \sqrt{2}y) = -2$

v $[1, \sqrt{2}, 2]$: $\quad z''_{xx} = -2 \qquad$ v $[-1, -\sqrt{2}, -2]$

$z''_{xx} = 2$

atd.

Příklad

Ukažte, že funkce $F(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ definuje předpisem $F(x,y) = 1$ pro $[x,y] \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2})$ implicitně proměnnou y jako funkci $f(x)$ proměnné x. Určete $f'(x)$.

Derivujme definiční vztah podle x ($y = y(x)$):

$$0 = e^x \cdot \sin y + e^x \cdot \cos y \cdot y' + e^y \cdot y' \cdot \sin x + e^y \cdot \cos x$$

$$\boxed{y' = -\frac{e^x \sin y + e^y \cdot \cos x}{e^x \cdot \cos y + e^y \cdot \sin x}}$$

Nedef. pro $e^x \cdot \cos y + e^y \sin x = 0$

Na $D(F)$ je $e^x > 0$, $e^y > 0$, $\cos y > 0$, $\sin x > 0$.

10 16-17:29

Příklad

Rozhodněte, zda křivka tvořená body vyhovujícími vztahu $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, 1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou.

Určíme $y''(1)$: derivujeme podle x:

$$(*)\quad 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$$

$$(**)\quad 6x + 6y\cdot(y')^2 + 3y^2 \cdot y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$$

Dosadíme $x=1, y=1$: $(*)\quad 3 + 3y' - 2 - 2y' = 0$

$$\underline{y' = -1}$$

$$(**)\quad 6 + 6 + 3y'' + 2 + 2 - 2y'' = 0$$

$$y'' = -16 < 0$$

$\Rightarrow$ graf leží pod tečnou.