Příklady k procvičení

Příklad

Ukažte, že funkce $F(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ definuje předpisem $F(x,y) = 1$ pro $[x,y] \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2})$ implicitně proměnnou y jako funkci $f(x)$ proměnné x. Určete $f'(x)$.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. $\quad x \neq 0$

v polárních souřadnicích: $\quad x = r\cos\varphi$, $\quad y = r\sin\varphi$

$\ln r = \varphi \iff r = e^{\varphi}$ $\quad$ zjednodušení

zderivujeme def. předpis podle x:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{y'\cdot x - y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$\frac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2} = \frac{y'x-y}{x^2+y^2} \quad /\cdot(x^2+y^2)$$

$$(*) \qquad x+y\cdot y' = y'x-y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Dosadíme $y'=0$: $\quad x+y=0$

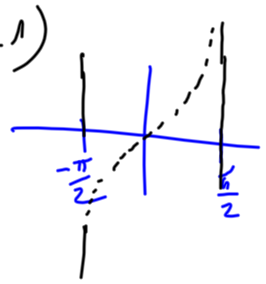
a dosadíme-li do původní rce:

$$\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg}(-1)$$

$$\ln\sqrt{2x^2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2x^2} = e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2}\cdot|x| = e^{-\frac{\pi}{4}}$$



$$x = \pm e^{-\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}, \quad y=-x$$

Ověříme znaménko y''; zderivujeme $(*)$ s tím, že $y'=0$.

$$1+\cancel{y'y'}+y\cdot y'' = y''\cdot x+\cancel{y'}-\cancel{y'}$$

$$y''(y-x) = -1$$

$y=-x$: $\quad -2x\cdot y'' = -1$

$$2x\cdot y'' = 1$$

y'' (ve stacionárních bodech) splňuje

$y''>0 \iff x>0$

Závěr

$[x,y]$: $\quad \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}[1,-1]$ ... lok. minimum

$\quad \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}[-1,1]$ ... lok. max.

10 23-16:07

Věta

Pro funkci f n proměnných a bod $P = (a_1, \dots, a_n) \in M_b$, v jehož okolí je M_b grafem funkce $(n-1)$ proměnných, je implicitní rovnice pro tečnou nadrovinu

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \cdot (x_n - a_n).$$

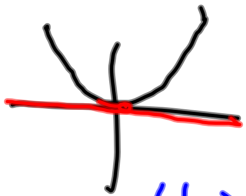
$f(x,y,z) = 3x + 2y + z$ $\quad b = 1$

$\underline{3x + 2y + z = 1}$ $\quad P = (0,0,1)$

tečná nadrovina: $0 = 3\cdot(x-0) + 2(y-0) + 1\cdot(z-1)$

$0 = 3x + 2y + z - 1$

Př: a) $x^2 - y = 0$



$f(x,y) = x^2 - y$ $\quad b = 0$

$P = (0,0)$

tečná nadrovina (tečna):

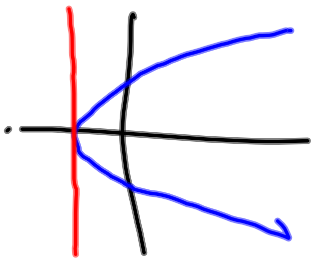
$0\cdot(x-0) + (-1)\cdot(y-0) = 0$

$\underline{y = 0}$

b) $y^2 - x = 1$ $\quad P = (-1,0)$

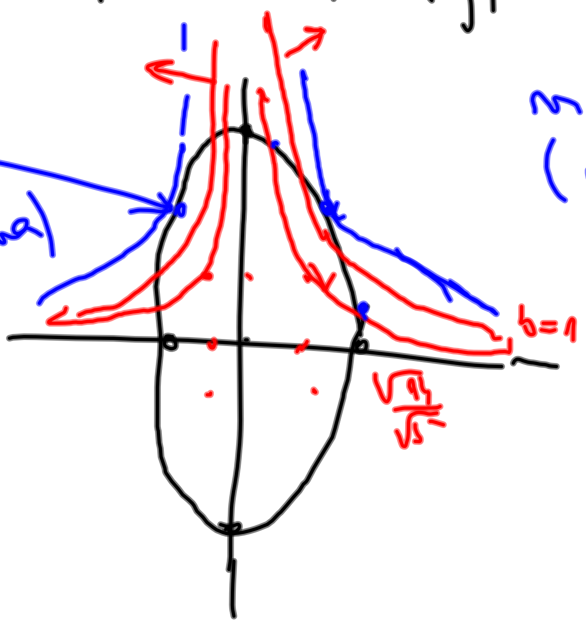
$-1(x+1) + 0\cdot(y-0) = 0$

$x = -1$



$M: 5x^2 + 2y^2 = 14$ $\qquad$ $h(x,y) = x^2 y$

extrém v dotyku (společná tečna)



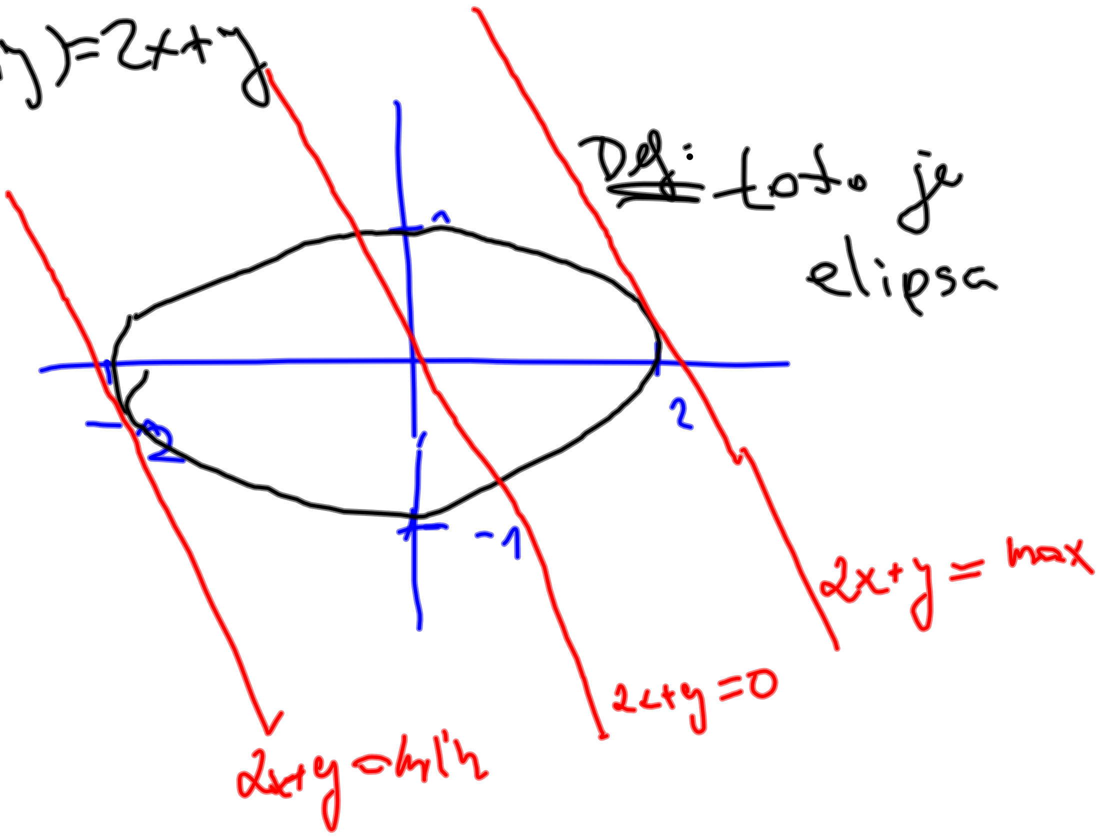
vrstevnice (úrovňové množiny)

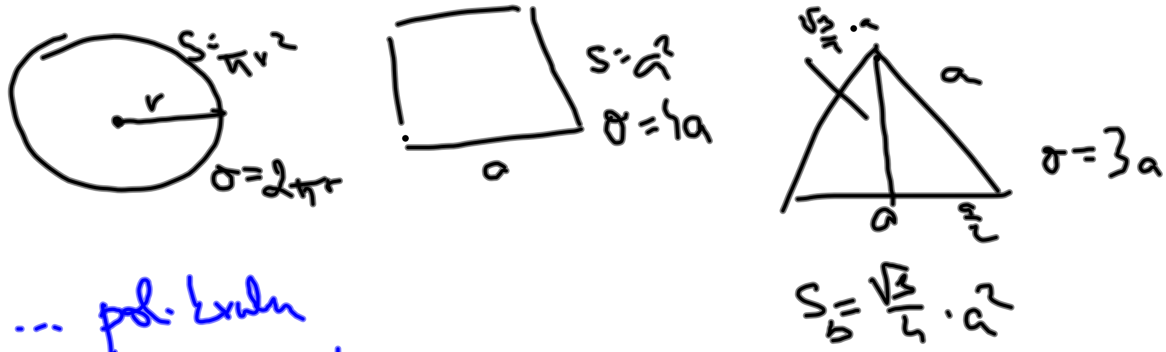
$$x^2 y = b$$

$$y = \frac{b}{x^2}$$

$f(x,y) = 2x + y$

Def: toto je elipsa





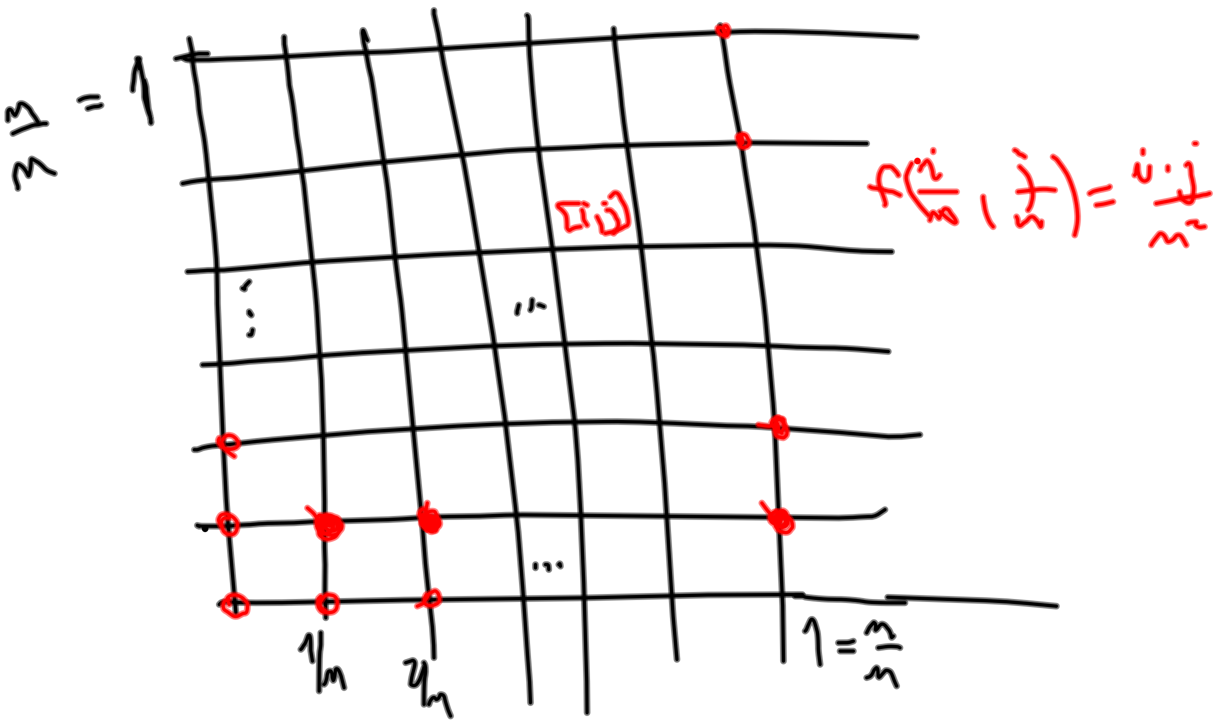
x ... pol. kruhu

y ... strana čtv.

z ... strana △

$$2\pi \cdot x + 4y + 3z = l$$

$$f(x,y,z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot z^2$$



$\frac{n}{n} = 1$
$[i,j]$
$f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{i \cdot j}{n^2}$
$1/n$
$2/n$
$1 = \frac{n}{n}$