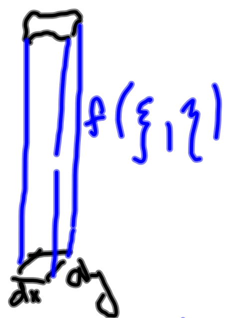
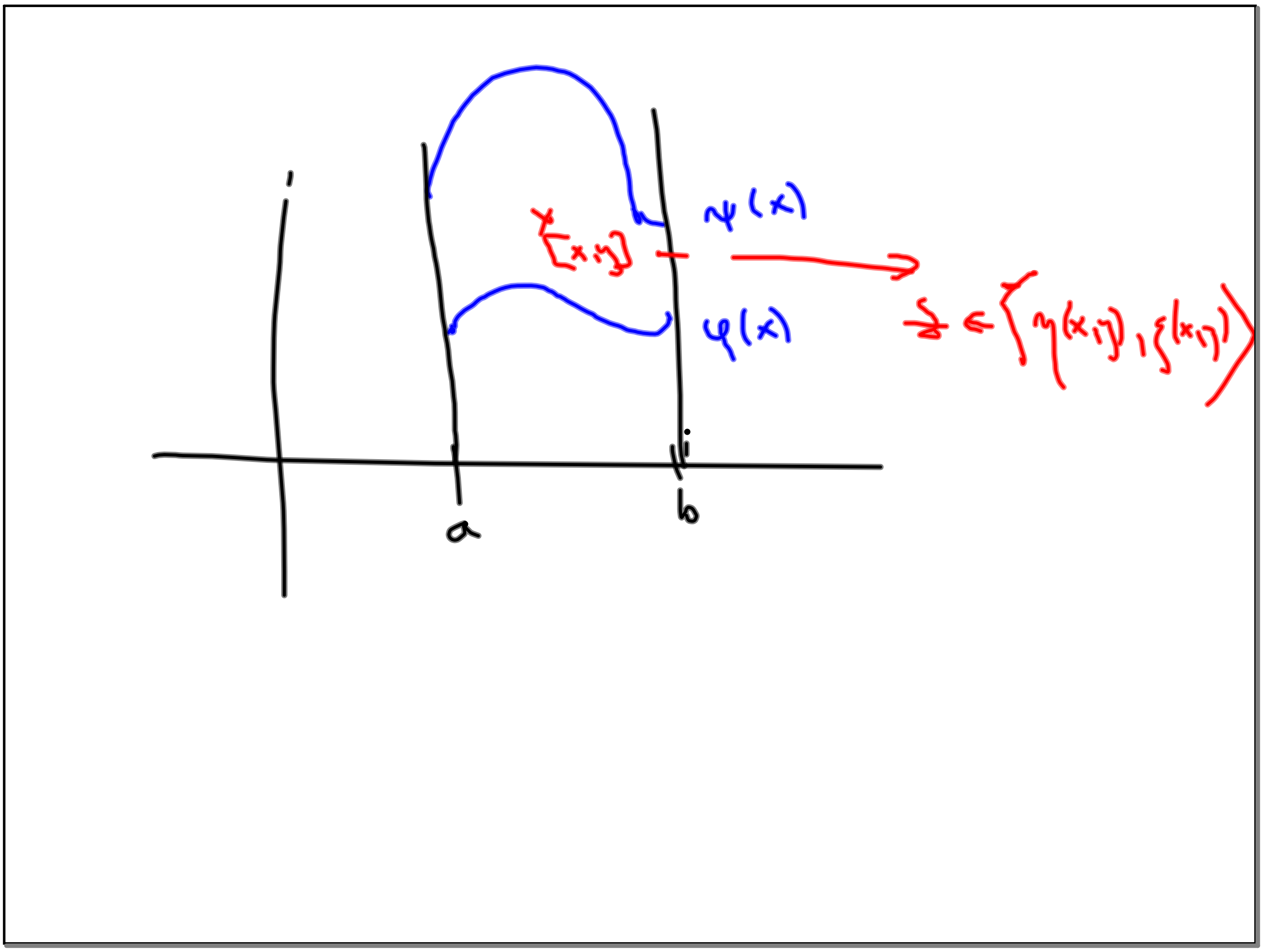
$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} f(x,y)\,\boxed{dx\,dy}$$



objem $\approx f(\xi,\eta)\cdot dx \cdot dy$

10 30-15:56



10 30-16:05

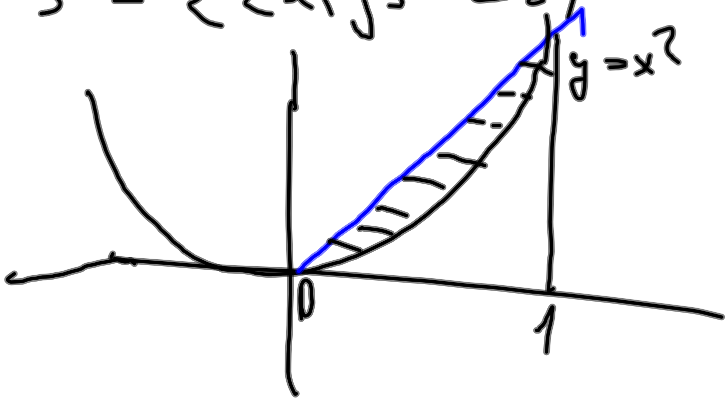
Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dx \, dy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

$S = \{ [x,y] \in E_2 ; \ x \geq 0, y \geq 0, \ x \in \langle 0,1 \rangle, x^2 \leq y \leq x \}$

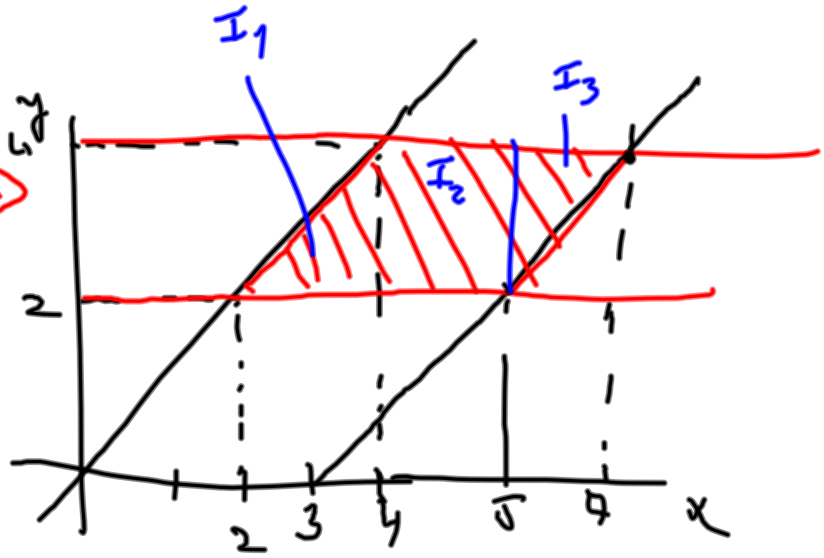


Na $\langle 0,1 \rangle$ je $x \geq x^2$

Příklad

Převeďte dvojný integrál $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}A$ na dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace) pro množinu A ohraničenou přímkami $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$. Ověřte (přímo nebo s využitím SW např. MAW) rovnost výsledku pro konkrétní funkci $f(x,y) = y$.

A



$A \neq \langle 2,7\rangle \times \langle 2,4\rangle$

I_1: $2 \le x \le 4$, $2 \le y \le x$

I_2: $4 \le x \le 5$, $2 \le y \le 4$

I_3: $5 \le x \le 7$, $x-3 \le y \le 4$

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_2^4 \int_2^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^5 \int_2^4 f(x,y)\,dy\,dx + \int_5^7 \int_{x-3}^4 f(x,y)\,dy\,dx$$

Elegantněji: $2 \le y \le 4$

$y \le x \le y+3$

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_2^4 \int_y^{y+3} f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrujeme funkci y na množině zadané nerovnostmi $2 \le y \le 4$ a $y \le x \le y + 3$.

$$I = \int_2^4 \int_y^{y+3} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_2^4 [x\,y]_y^{y+3} \, \mathrm{d}y \qquad \textit{(vnitřní integrace)}$$

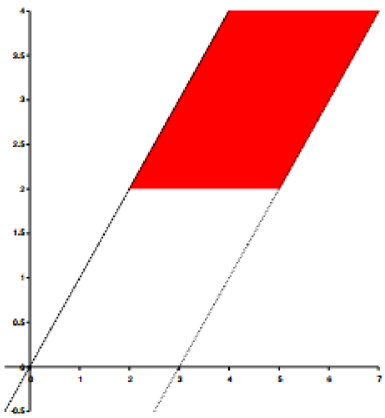
$$= \int_2^4 (y+3)\,y - y\,y \, \mathrm{d}y \qquad \textit{(dosazení mezí)}$$

$$= \int_2^4 3\,y \, \mathrm{d}y \qquad \textit{(úprava)}$$

$$= \left[\frac{3\,y^2}{2}\right]_2^4 \qquad \textit{(vnitřní integrace)}$$

$$= 24 - 6 \qquad \textit{(dosazení mezí)}$$

$$= 18 \qquad \textit{(úprava)}$$



$$I = \int_2^4 \int_2^x y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_2^4 \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^x \mathrm{d}x \qquad \textit{(vnitřní integrace,}$$
$$= \int_2^4 \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}2^2 \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(dosazení me}$$
$$= \int_2^4 \frac{x^2}{2} - 2 \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(úprava)}$$
$$= \left[\frac{x^3}{6} - 2\,x\right]_2^4 \qquad \textit{(vnitřní integrace)}$$
$$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) \qquad \textit{(dosazení mezí)}$$
$$= \frac{16}{3} \qquad \textit{(úprava)}$$

$$\frac{16}{3} + 6 + \frac{20}{3} = \underline{\underline{18}}$$

Integrujeme funkci y na mn

$$I = \int_5^7 \int_{x-3}^4 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_5^7 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-3}^4 \mathrm{d}x \qquad \textit{(vn}$$
$$= \int_5^7 \frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}(x-3)^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_5^7 8 - \frac{(x-3)^2}{2} \, \mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{x\,(x^2 - 9\,x - 21)}{6}\right]_5^7$$
$$= \frac{245}{6} - \frac{205}{6} \qquad \textit{(dosaze}$$
$$= \frac{20}{3} \qquad \textit{(úprava)}$$

Integrujeme funkci y na množině zadané nerovnostmi $4 \leq x \leq 5$ a $2 \leq y \leq 4$.

$$I = \int_4^5 \int_2^4 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_4^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^4 \mathrm{d}x \qquad \textit{(vnitřní integrace)}$$
$$= \int_4^5 \frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}2^2 \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(dosazení mezí)}$$
$$= \int_4^5 6 \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(úprava)}$$
$$= [6\,x]_4^5 \qquad \textit{(vnitřní integrace)}$$
$$= 30 - 24 \qquad \textit{(dosazení mezí)}$$
$$= 6 \qquad \textit{(úprava)}$$

10 30-16:29

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dx\, dy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $x^2+y^2 = r^2$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r)\, \underline{r}\, dr\, d\varphi$$

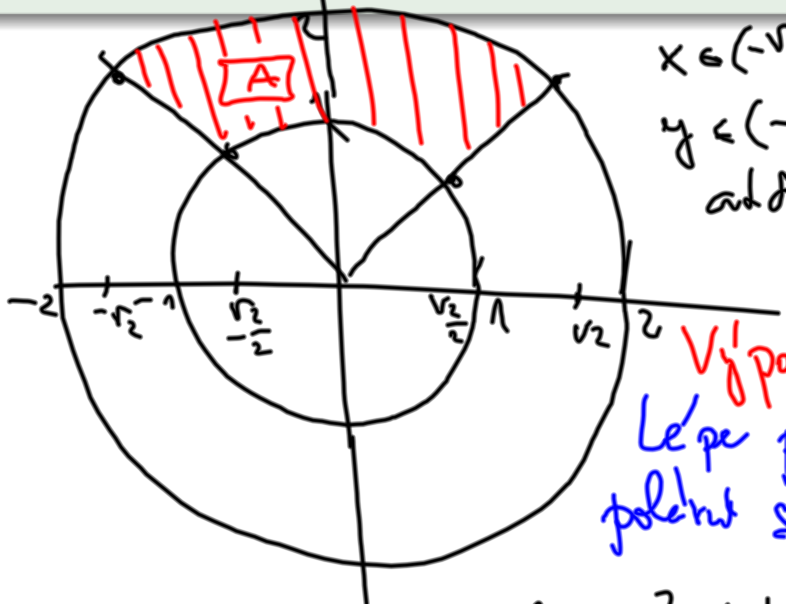
Jacobián transformace

10 30-16:44

Vypočtěte integrál

$$\iint_A 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge |x|\}$.



$x \in (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$;

$y \in (-x, \sqrt{4-x^2})$

atd.

Výpočet nesnadný

Lépe přes polární souřadnice

$$1 \le x^2+y^2 \le 4 \iff 1 \le r^2 \le 4 \iff 1 \le r \le 2$$

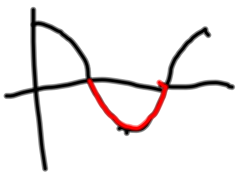
$$y \ge |x| \iff r \sin\varphi \ge |r\cos\varphi| \qquad (r \ge 0)$$

$$\iff \sin\varphi \ge |\cos\varphi|$$

Nutné: $\underline{\sin\varphi \ge 0}$, tj. $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$. Pak

$$\iff \sin^2\varphi \ge \cos^2\varphi$$

$$\iff 0 \ge \cos 2\varphi$$



$$\iff 2\varphi \in \langle \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2} \rangle$$

$$\iff \varphi \in \langle \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4} \rangle$$

Bylo vidět i přímo!

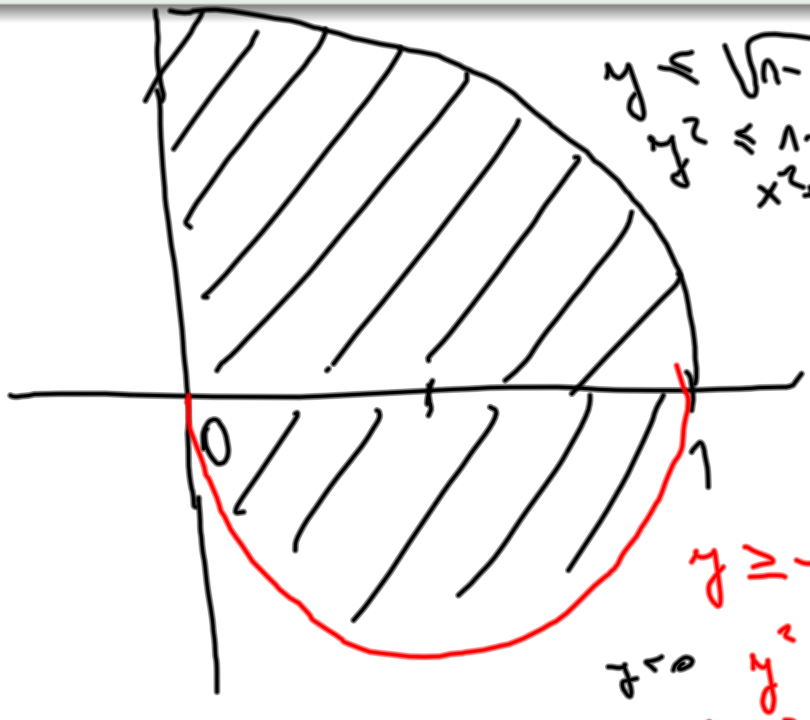
Tedy

$$\iint_A 2(x^2+y^2)\,dA = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2r^2 \cdot r \,d\varphi\, dr =$$

$$= \int_1^2 \pi r^3\, dr = \frac{1}{4}\pi \left[r^4\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{15}{4}\pi}}$$

Spočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



$y \leq \sqrt{1-x^2}$ $\quad y \geq 0$

$y^2 \leq 1-x^2$

$x^2+y^2 \leq 1$

$y \geq -\sqrt{x-x^2}$

$y<0$ $\quad y^2 \leq x-x^2$

$x^2+y^2 \leq x$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{4}$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq r^2$

$k([x_0,y_0]; r)$

Integrál lze spočítat dvěma způsoby:

① (chytře) Obsah množiny: $\frac{\pi \cdot 1^2}{4} + \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} =$

$= \frac{3\pi}{8}$

② (polární souřadnice)

$x \in \langle 0, 1 \rangle$

$y \in \langle -\sqrt{x-x^2}, \sqrt{1-x^2} \rangle$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$y \geq -\sqrt{x-x^2} \underset{\text{pro } y<0}{\Longleftrightarrow} x^2+y^2 \leq x$

$r^2 \leq r\cos\varphi$

$r \leq \cos\varphi$

$y \leq \sqrt{1-x^2} \underset{\text{pro } y>0}{\Longleftrightarrow} x^2+y^2 \leq 1$

$r^2 \leq 1$

$r \leq 1$

$\varphi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{0}^{\cos\varphi} r \, dr \, d\varphi + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{1} r \, dr \, d\varphi$$

$= \dots$

Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočtěte in
$\iint_A \sqrt{xy}\,dx\,dy$, kde množina A je ohraničena křivkar

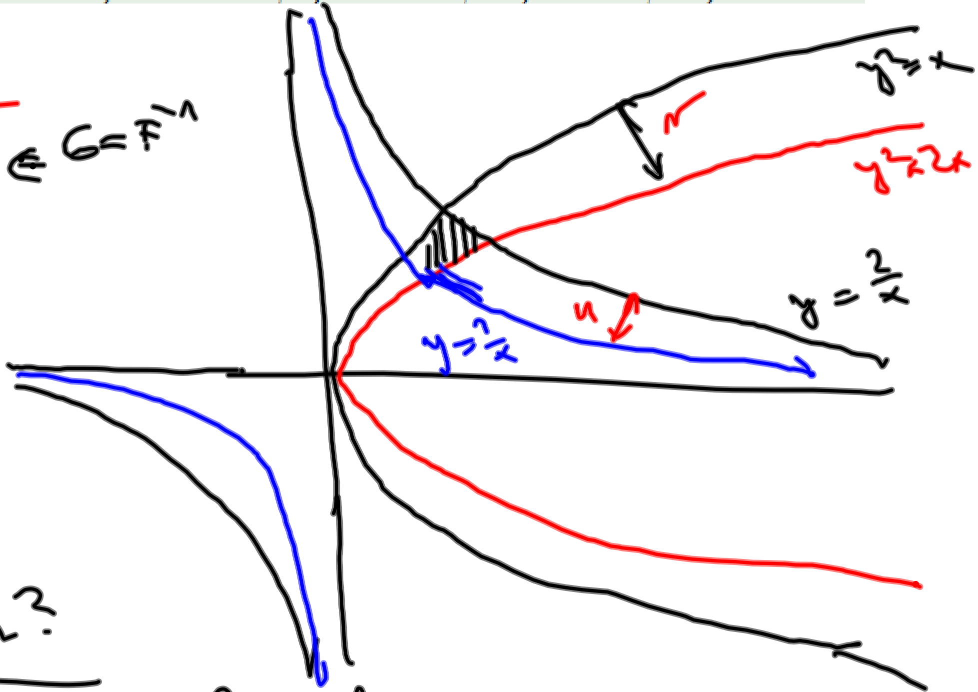
$$y^2 = 2x,\ y^2 = x,\ xy = 1,\ xy = 2.$$

$u = x \cdot y$

$v = \frac{y^2}{x}$ $\Leftarrow G = F^{-1}$

$1 \leq u \leq 2$

$1 \leq v \leq 2$



Jacobián?

$F:\ x^3 = \frac{u^2}{v}$ $\quad x = u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}}$

$y = u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}}$

Odtud lze spočítat Jacobián.

Snadnější (přes Jacobián inverze)

$$D^1 G = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{3y^2}{x} = 3v$$

$$\Rightarrow D^1 F = \frac{1}{D^1 G} = \frac{1}{3v}$$

$$\iint_A \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_1^2 \int_1^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3v}\,du\,dv$$

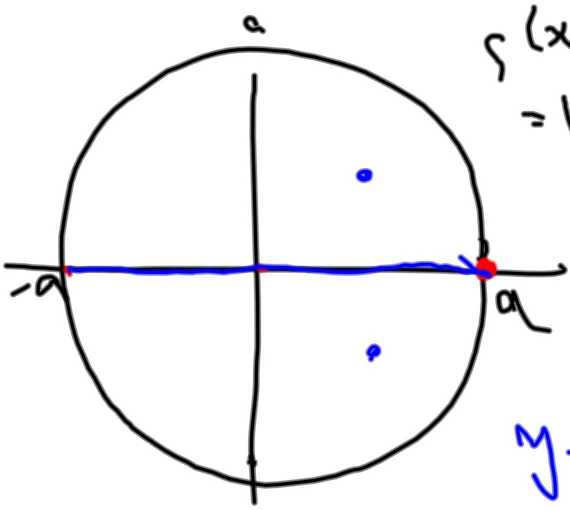
$= \ldots$

10 30-17:15

Příklad

Určete souřadnice těžiště kruhové destičky $x^2 + y^2 \leq a^2$, je-li její hustota v bodě $[x, y]$ přímo úměrná vzdálenosti od bodu $[a, 0]$.

$\left[x_T = -\frac{a}{5}, y_T = 0\right.$



$\rho(x,y) =$
$= \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$

souměrnost

$\Downarrow$

$y_T = 0$

10 30-17:33

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2 \to \min$$

$f(x) = a \cdot x + b$

$F(a,b) = \sum (ax_i + b - y_i)^2$

Najdeme stac. body F:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial a} = \sum 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial b} = \sum 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1$$

$\Downarrow$

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

10 30-17:37