měsíčně: $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$ $r = 3\%$ p.a.

$\approx 1{,}0304$

denní $\left(1+\frac{r}{360}\right)^{360}$

spojité $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = e^{r}$

$\approx 1{,}03045$

$r = 20\%$ p.a.

měsíční : 1,219

spojité : 1,221

spojité! $y' = r \cdot y$ $y = e^{rt}$

$y' + y = 1$

$$y' = f(t)\cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t)\cdot g(y)$$

separované proměnné

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt$$

integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt$$

11 6-16:36

Příklad

Jako příklad najděme řešení rovnice

$$y' = x \cdot y.$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = x \cdot dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + c}$$

$$y = K e^{\frac{x^2}{2}} \qquad K \in \mathbb{R}$$

11 6-16:40

Příklad

Najděte obecné řešení rovnice $y - y^2 + xy' = 0$.

$$y - y^2 + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{y^2 - y}{dy}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2 - y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int -\frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} = \ln|y-1| - \ln|y|$$

$$= \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + \ln C$$

$$|x| = C \cdot \left|\frac{y-1}{y}\right|$$

$$x = C \cdot \frac{y-1}{y} \quad \text{implicitní mj.}$$

$$x = C \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - \frac{x}{C}$$

$$y = \frac{1}{1 - \frac{x}{C}}$$

$$K = -\frac{1}{C} : \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{1 + K \cdot x}}} \quad K \in \mathbb{R}$$

Pozor, co $y^2 - y = 0$? $y \equiv 1$ nebo $\underline{y \equiv 0}$?

singulární řešení

$$y' + a(t)y = b(t)$$

integrační faktor $F(t)$:

vynásobením dostaneme nalevo derivaci součinu:

$$y' \cdot F(t) + a(t)\, y\, F(t) = b(t) \cdot F(t)$$

Tj. musí platit, že $F'(t) = a(t)F(t)$

$$\boxed{F(t) = e^{\int a(t)\,dt}}$$

$$\frac{F'}{F} = a(t)$$

$$\Leftarrow \ln F = \int a(t)\,dt \Leftarrow \frac{dF}{F} = a(t)\,dt$$

$$y' + a(t)\cdot y = b(t) \quad \Big| \cdot e^{\int a(t)dt}$$

$$\underbrace{y' e^{\int a(t)dt} + a(t)\cdot y\cdot e^{\int a(t)dt}} = b(t) e^{\int a(t)dt}$$

$$\left(y\cdot e^{\int a(t)dt}\right)' = b(t) e^{\int a(t)dt}$$

$$\Downarrow$$

$$y = e^{-\int a(t)dt}\left(\int b(t)\cdot e^{\int a(t)dt} + C\right)$$

11 6-17:02

Příklad

Rychlost, kterou se rozpadá konkrétní izotop daného prvku, je přímo úměrná množství izotopu. Poločas rozpadu izotopu Plutonia, ^{239}Pu, je 24 100 let. Za jak dlouho ubude setina z nukleární pumy, jejíž aktivní složkou je zmiňovaný izotop?

$$m = e^{-kt} \cdot m_0$$

Poločas rozpadu t_r: $\frac{1}{2} \cancel{m_0} = e^{-k \cdot t_r} \cdot \cancel{m_0}$

$$e^{-k \cdot t_r} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -k \cdot t_r = -\ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{t_r}$$

$$k \doteq 2{,}88 \cdot 10^{-5}$$

$$0{,}99 = e^{-k \cdot t} \Leftrightarrow -k \cdot t = \ln 0{,}99$$

$$t = -\frac{\ln 0{,}99}{k}$$

$$\underline{\underline{t \doteq 349{,}4}}$$

11 6-17:10

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F(x;y)\,dy = G(x,y)\cdot dx$$

homogenní: $F(t\cdot x, t\cdot y) = t^c \cdot F(x,y)$

$$G(t\cdot x, t\cdot y) = t^c \cdot G(x,y)$$

$$z = \frac{y}{x} \qquad y = z\cdot x$$

$$y' = z'\cdot x + z$$

$$z'x + z = f(z)$$

$$z'x = f(z) - z$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot x = f(z) - z$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$$ sep. prom.

Bernoulli:

$$y' = f(t) \cdot y + g(t) \cdot y^r \quad / : y^r$$

$$\frac{y'}{y^r} = f(t) \cdot \underbrace{y^{1-r}}_{z} + g(t)$$

11 6-17:20

Příklad

Řešte rovnici
$$(x^2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

$$(x^2 - xy)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$(x^2 - xy) \cdot dy = -y^2 \cdot dx$$

homogenní DE:

$$\left[\; y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \left(\frac{xy - x^2}{y^2}\right)^{-1} = \left(\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{-1} = f\left(\frac{y}{x}\right)\right.$$

$$\left. \text{kde } f(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}} \;\right]$$

$$(x^2 - x \cdot y)\,dy = -y^2 \cdot dx$$

$u = \frac{y}{x}$

$u \cdot x = y$

$du \cdot x + u \cdot dx = dy$

$$(x^2 - x^2 \cdot u)(du \cdot x + u \cdot dx) = -(u \cdot x)^2 \cdot dx$$

$$(1-u) \cdot (x \cdot du + u \cdot dx) = -u^2 \cdot dx$$

$$x\,du + u \cdot dx = -\frac{u^2}{1-u} \cdot dx$$

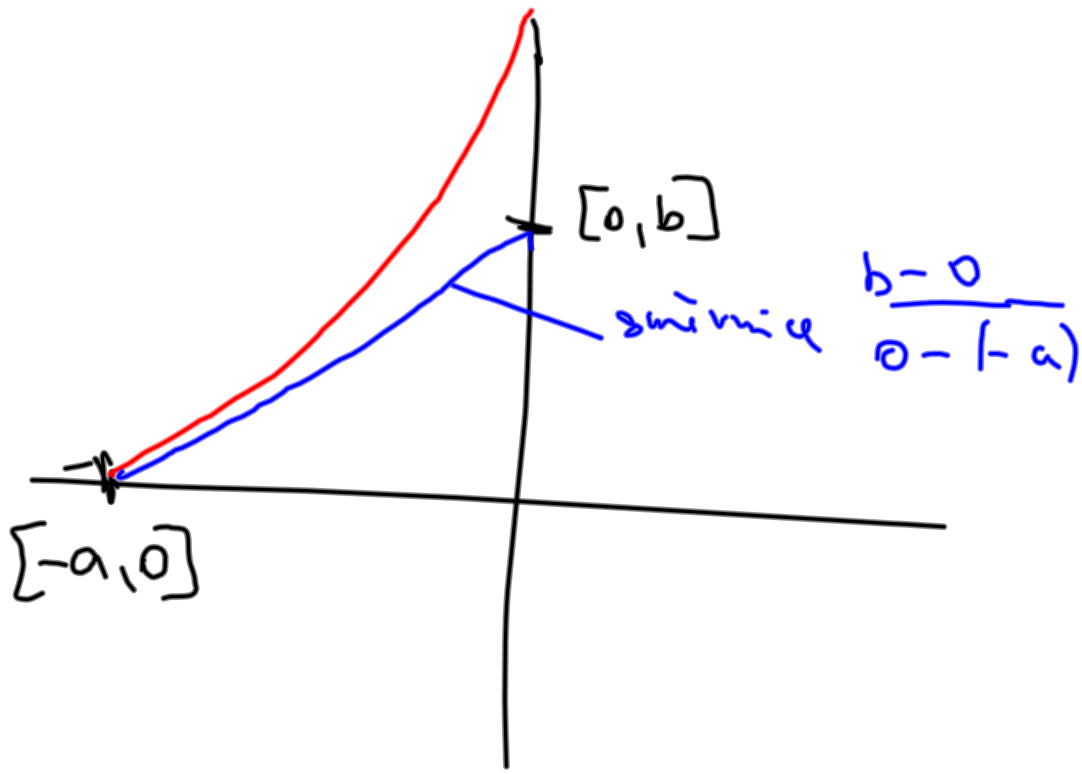
$$x\,du = \left(-u - \frac{u^2}{1-u}\right) dx$$

$$x \cdot du = -\frac{u}{1-u}\,dx$$

$$\frac{1-u}{u} \cdot du = -\frac{dx}{x}$$

$$\ldots \quad \frac{u}{e^u} = \frac{C}{x} \Rightarrow \underline{\underline{y = C \cdot e^{\frac{y}{x}}}}$$

Funkce $y(x)$ zadána pouze implicitně


[0,b]
[-a,0]
směrnice
$\frac{b-0}{0-(-a)}$