$\mathcal{A}$ spočetná $\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ bijekce

$\Leftrightarrow \mathcal{A}$ lze uspořádat do posloupnosti

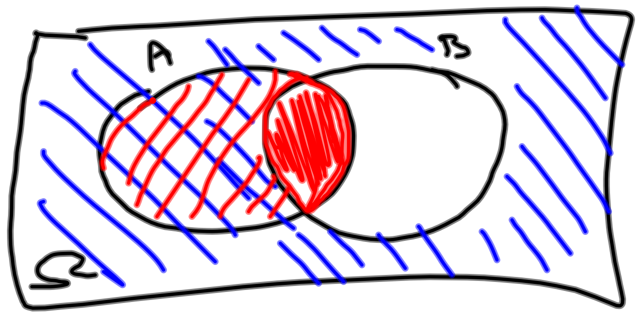
$a_1, a_2, a_3, \dots \qquad \underset{\in \mathcal{A}}{a_i} \neq a_j$ pro $i \neq j$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

	1	2	3	..
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \dots$



Vennowy diagram

$$A \cap B = A \setminus (\Omega \setminus B) = A \setminus B^c$$

11 13-16:21

$P(\emptyset) = 0$?

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pro $A \cap B = \emptyset$

$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

$$\begin{array}{ccc} P(\Omega \cup \emptyset) & = & P(\Omega) \\ \| & & \| \\ P(\Omega) & & 1 \\ \| & & \\ 1 & & \end{array}$$

$\Omega = A \cup A^c$, kde $A \cap A^c = \emptyset$

$\underset{\substack{\| \\ 1}}{P(\Omega)} = \underset{\geq 0}{P(A)} + \underset{\geq 0}{P(A^c)} \Rightarrow P(A) \leq 1$

$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

$$A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{nesluč.}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{nesluč.}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \qquad A \cap B \subseteq B$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Příklad

Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.

a) Určete základní prostor Ω. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B. $A = \{1,3,5\}$ $B = \{2,3,5\}$

c) Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete:
- padne sudé číslo, $\Omega \setminus A = A^c$
- padne číslo 2, $B \setminus A$
- padne číslo 2 nebo 3 – není jev

d) Určete nejmenší jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$, obsahující jevy A i B.

c) $\{2,3\} \notin \mathcal{A}$

d) $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, A, B, A^c, B^c = \{1,4,6\}, A \cup B, B \setminus A = \{2\}, A - B = \{1\}, \{4,6\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2\}^c, \{1\}^c, \{3,4,5,6\}, \{1,2,4,6\}\}$

11 13-16:39

Příklad

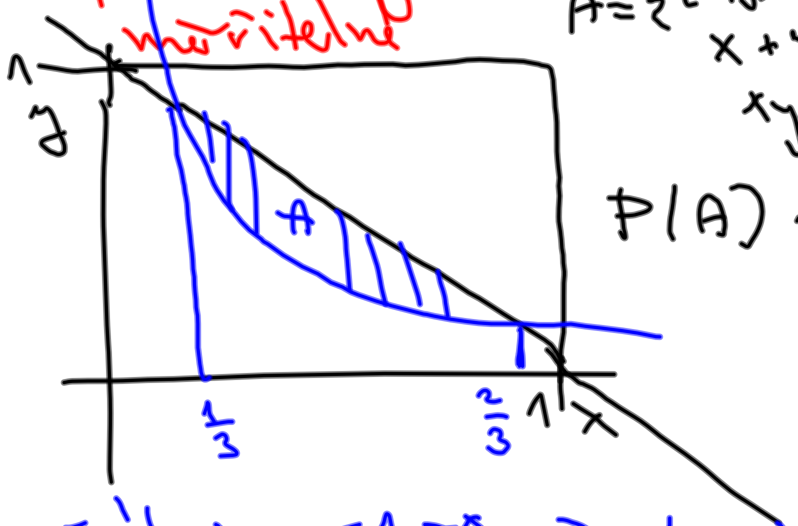
Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu $(0,1)$ budou mít součet menší než 1 a součin větší než $2/9$?

$$\Omega = (0,1)\times(0;1)$$

$\mathcal{A}$ ... podmnožiny Ω, které jsou měřitelné

$$A = \{[x,y] \in \Omega \,;\; x+y<1,\; xy > \tfrac{2}{9}\}$$

$$P(A) = ?$$



$$y > \frac{2}{9x}$$

Průsečíky: $y = 1 - x \Rightarrow x(1-x) = \frac{2}{9}$

$$x - x^2 = \frac{2}{9}$$

$$9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$D = 81 - 72 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 3}{18} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\operatorname{vol} A = \int_{1/3}^{2/3} \int_{\frac{2}{9x}}^{1-x} dy\, dx = \int_{1/3}^{2/3} 1 - x - \frac{2}{9x}\, dx =$$

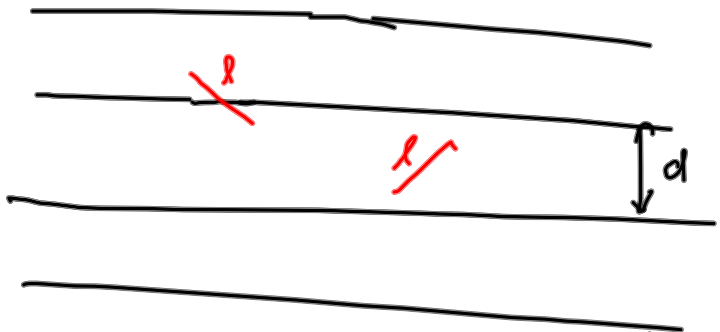
$$= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\ln x \right]_{1/3}^{2/3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\ln\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{2}{9}\ln\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2.$$

Příklad (Buffonova úloha)

Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku?



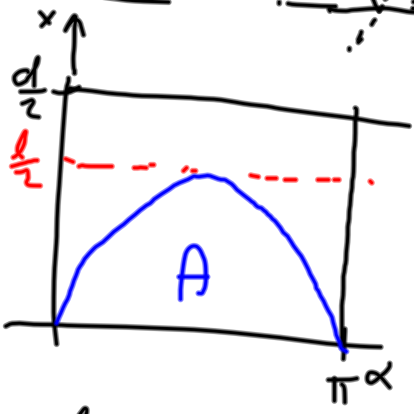
$$\Omega = \{[x,\alpha];\ x \in \langle 0, \tfrac{d}{2}\rangle,\ \alpha \in \langle 0, \pi)\}$$

x .. vzdálenost od nejbližší rovnoběžky

α .. úhel který svírá jehla s touto rovn.

$$A = \text{„protne"} = \{[x,\alpha] \in \Omega;\ \frac{x}{\sin\alpha} \le \frac{l}{2}\}$$

$$P(A) = \frac{\text{vol } A}{\text{vol } \Omega}$$



$x \le \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$

$$\text{vol } A = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{l}{2}\sin\alpha} dx\, d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{l}{2}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{l}{2}(+1+1) = \underline{\underline{l}}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{l}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Speciálně pro $l = \frac{d}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi}$.

Důkaz.

První tvrzení je přepsáním předchozí formule, druhé z prvého plyne dosazením $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$. $\square$

$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ nesluč.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) =$$
$$= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$$