

Matematika III – 1. týden
Funkce více proměnných: křivky, směrové derivace,
diferenciál, derivace vyšších řádů

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

17. 9. 2013

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce a zobrazení
 - Funkce více proměnných
 - Topologie euklidovských prostorů
 - Křivky v euklidovských prostorech
- 3 Parciální derivace a diferenciál
 - Derivace ve směru vektoru
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce
- 4 Derivace vyšších řádů
 - Iterované parciální derivace
 - Hessián – aproximace 2. řádu

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číselovaných proměnných používáme písmena x, y, z . To znamená, že funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována.

(Hříčkou pro písemky a úlohy bývá úkol k dané formuli pro funkci najít co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definována vztahem

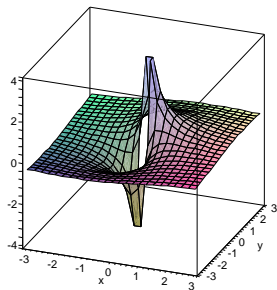
$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f .

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku,
maximálním definičním oborem
je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n , což je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q . Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána

$$\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|P - R\| = \|(P - Q) + (Q - R)\| \leq \|(P - Q)\| + \|(Q - R)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n :

Definition

- *Cauchyovská posloupnost* – $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost* – $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$ – existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina* – obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina* – její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ -okolí bodu P* – množina
$$\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n; \|P - Q\| < \delta\},$$

Definition

- *hraniční bod P množiny A* – každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* – existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,
- *ohraničená množina* – leží celá v nějakém δ -okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina* – uzavřená a ohraničená množina.

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*
- 4 A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A,*
- 5 A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t-t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál*: $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Výrok o integrálu má smysl i pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !
Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách v \mathbb{R}^n a stejně se rozpozná i jejich existence.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a antiderivace pro křivky:

Theorem

Je-li $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Věta o střední hodnotě dává existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c'_i(t_i).$$

Tato čísla ale **budou obecně různá**, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

Pořád nám ale úvaha stačí na následující odhad

Theorem

Je-li c křivka v E_n se spojitou derivací na kompaktním intervalu $[a, b]$, pak pro všechny $a \leq s \leq t \leq b$ platí

$$\|c(t) - c(s)\| \leq \sqrt{n} \max_{r \in [a, b]} \|c'(r)\| \cdot |t - s|.$$

Derivace zadává **tečný vektor** ke křivce $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření \mathbb{R}^n daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je **tečna** ke křivce c v bodě t_0 , nezávisí na parametrizaci křivky c .

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)).$$

Speciální volbou přímek ve směru souřadných os dostáváme tzv. **parciální derivace funkce** f , které značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, nebo bez odkazu na samotnou funkci jako operace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + t, y) - f(x, y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x, y + t) - f(x, y)).$$

Example

Se samotnými parciálními nebo směrovými derivacemi nevystačíme pro dobrou aproximaci chování funkce lineárními výrazy:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } xy = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Žádná z nich neprodukuje všechny hladké křivky procházející bodem $(0, 0)$ na hladké křivky.

Pro g existují obě parciální derivace v $(0, 0)$ a jiné směrové derivace neexistují, zatímco pro h existují všechny směrové derivace v bodě $(0, 0)$ a platí $d_v h(0) = 0$ pro všechny směry v , takže jde o lineární závislost na $v \in \mathbb{R}^2$.

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x , jestliže

- 1 v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v a
- 3 $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x + v) - f(x) - d_v f(x))$.

Lineární výraz $d_v f$ (závislý na vektorové proměnné v) nazýváme **diferenciál funkce** f vyčíslený na přírůstku v .

V literatuře se často také říká **totální diferenciál** df funkce f .

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě (x_0, y_0) je lineární funkce $df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.
Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (*)$$

a platí:

Theorem

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojitě parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí ().*

Funkce třídy C^1

Definition

Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na množině A , jestliže má ve všech bodech množiny A spojitě parciální derivace. Píšeme $f \in C^1(A)$.

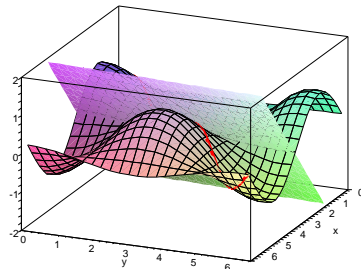
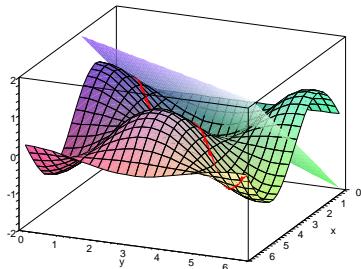
Viděli jsme, že funkce v $C^1(A)$ mají na A diferenciál, tj. jsou na A diferencovatelné.

Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $(x_0, y_0) \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f .

Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.



Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .
Tato nadrovina

- 1 prochází bodem $(x, f(x))$
- 2 její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Analogie s funkcemi jedné proměnné:

Diferencovatelná funkce f na E_n má v bodě $x \in E_n$ nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod.

To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x , jestliže

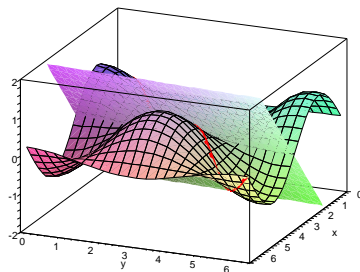
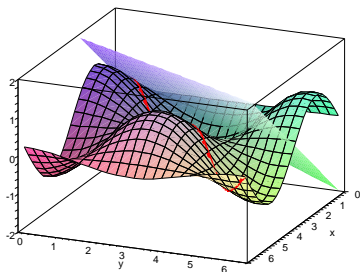
- 1 v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v a
- 3 $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x+v) - f(x) - d_v f(x))$.

Theorem

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (*)$$

Diferenciál zadává tečné (nad)roviny funkce n proměnných.



Graf funkce $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$, červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.

Diferencovatelná funkce f na E_n v bodě $x \in E_n$ má nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod. **To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.**

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět (diferenciální) operace na funkcích $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = df(v).$$

Výsledkem je $df(v) : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme iterovat.

Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\right)f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i}\right)f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o
parciálních derivacích k -tého řádu

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Theorem

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je k -krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Definition

Je-li $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce, nazýváme symetrickou matici funkcí

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessián funkce f v bodě x .

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

$$\alpha(t) = f(x(t), y(t))$$

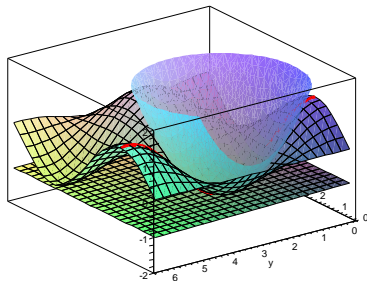
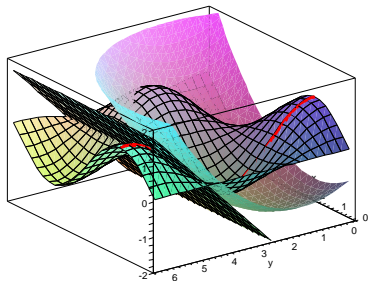
$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \right) + \frac{1}{2}t^2 \left(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2 \right)$$

stejné derivace do druhého řádu včetně. Funkci β píšeme vektorově:

$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + tdf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2(\xi \ \eta) \cdot Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

nebo $\beta(t) = f(x_0, y_0) + tdf(x_0, y_0)(v) + \frac{1}{2}t^2Hf(x_0, y_0)(v, v)$, kde $v = (\xi, \eta) = c'(t)$ je přírůstek zadaný derivací křivky $c(t)$ a Hessián symetrická 2-forma.

Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!



Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$.

Obecně pro funkci $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$, body $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ klademe

$$D^k f(x)(v) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}.$$

Ukažme ve dvou proměnných:

Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + D^1(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

Aproximace pomocí hesiánu:

$f(x_0, y_0) + D^1(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2}D^2(x_0, y_0)f(x - x_0, y - y_0)$
výraz třetího řádu

$$D^3f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \xi^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \xi^2 \eta + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \xi \eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \eta^3$$

a obecně

$$D^k f(x, y)(\xi, \eta) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell} \partial y^\ell} \xi^{k-\ell} \eta^\ell.$$