Drsná matematika III – 5. týden
Diferenciální rovnice

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

14. – 18. 10. 2013

Obsah přednášky

1. Literatura
2. Modely založené na změnách
   - Lineární a nelineární modely
   - Tlumený oscilátor
3. ODR 1. řádu
   - Rovnice se separovanými proměnnými
   - Systémy ODR prvního řádu
4. ODR vyšších řádů
   - Obecná teorie
   - Lineární diferenciální rovnice

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Lineární model prvního řádu

Derivace pracuje s okamžitými změnami studovaných veličin. Ze stejných důvodů jsme kdysi zaváděli diference a právě vztahy mezi hodnotami veličin a změnami těch samých nebo jiných veličin vedly k rovnicím.

Nejjednodušším modelem bylo úročení vkladů nebo půjček a totéž pro tzv. Malthusiánský model populace. Přírůstek byl úměrný hodnotě.

V rámci spojitého modelování by stejný požadavek vedl na rovnici vztahující derivaci funkce $y'(x)$ s její hodnotou

$$y'(x) = r \cdot y(x)$$

s konstantou úměrnosti r. Je snadné uhodnout řešení této rovnosti

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{rx}$$

s libovolnou konstantou C.

Tuto konstantu určíme jednoznačně volbou tzv. **počáteční hodnoty** $y_0 = y(x_0)$ v nějakém bodě x_0.

Pokud je část růstu v našem modelu dána konstatním působením nezávislém na hodnotě y nebo x (např. paušální poplatky za vedení účtu nebo přirozený úbytek populace třeba v důsledku porážek na jatkách), přidáme na pravé straně konstantu s:

$$y'(x) = r \cdot y(x) + s.$$

Zjevně bude řešením této rovnice funkce

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{rx} - \frac{s}{r}.$$

K tomuto závěru je velice lehké dojít, pokud si uvědomíme, že množinou všech řešení první (homogenní) rovnice je jednorozměrný vektorový prostor, zatímco řešení druhé (nehomogenní) rovnice se obdrží přičtením kteréhokoliv jednoho jejího řešení ke všem řešením předchozí rovnice. Lze pak snadno najít konstantní řešení $y(x) = k$ pro $k = -\frac{s}{r}$.

Nelineární model prvního řádu

U diferenčních rovnic jsme diskutovali tzv. logistický model populačního růstu založený na předpokladu, že poměr změny velikosti populace $p(n+1) - p(n)$ a její velikosti $p(n)$ je v afinní závislosti na samotné velikosti populace.

Nyní můžeme stejně zavést spojitý model pro populaci $p(t)$ závislou na čase t jako

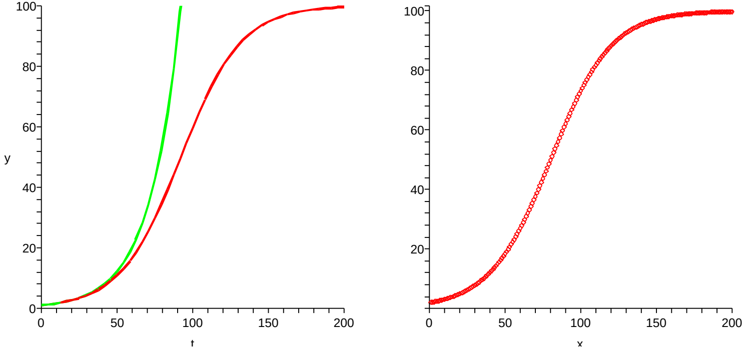
$$p'(t) = p(t)\left(-\frac{r}{K}p(t) + r\right),$$

tj. při hodnotě $p(t) = K$ pro velkou konstantu K je přírůstek nulový, zatímco pro $p(t)$ blízké nule je poměr rychlosti růstu populace k její velikosti blízký r (což je malé číslo v řádu setin vyjadřující rychlost růstu populace za dobrých podmínek.)

Derivováním ověříme, že následující funkce je řešením pro každou konstantu $C \in \mathbb{R}$

$$p(t) = \frac{K}{1 + CK\,\mathrm{e}^{-rt}}.$$

Srovnání diskrétního a spojitého modelu



Srovnáním červeného grafu řešení s $K = 100$, $r = 0,05$ a $C = 1$ (volba C odpovídá $p(0) = 1$) s řešením diferenční rovnice (napravo) vidíme, že skutečně oba přístupy k modelování populací dávají docela podobné výsledky. Pro srovnání je do levého obrázku zeleně vkresleno řešení Malthusiánského modelu s odpovídajícími daty.

Zkusme si popsat jednoduchý model pro pohyb nějakého tělesa upnutého k jednomu bodu silnou pružinou. Je-li $y(t)$ výchylka našeho tělesa od bodu $y_0 = y(0) = 0$, pak lze uvažovat, že zrychlení $y''(t)$ v čase t bude úměrné velikosti výchylky, avšak s opačným znaménkem. Dostáváme tedy tzv. rovnici oscilátoru

$$y''(t) = -y(t).$$

Tato rovnice odpovídá systému rovnic

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t).$$

Řešením takového systému je

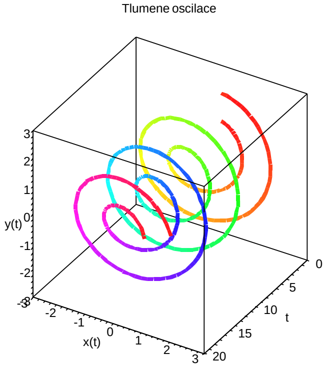
$$x(t) = R\cos(t-\tau), \quad y(t) = R\sin(t-\tau)$$

s libovolnou nezápornou konstantou R, která určuje maximální amplitudu, a konstantou τ, která určuje fázový posun.
Pro určení jednoznačného řešení potřebujeme proto znát nejen počáteční polohu y_0, nýbrž také rychlost pohybu v tomto okamžiku. Těmito dvěma údaji bude určena jak amplituda tak fázový posun jednoznačně.
Předpokládejme, že vlivem vlastností materiálu pružiny bude také působit síla úměrná okamžité rychlosti pohybu našeho objektu, s opačným znaménkem než má amplituda.

To vyjádříme dodatečným členem s první derivací a naše rovnice je

$$y''(t) = -y(t) - \alpha y'(t),$$

kde α je konstanta, která vyjadřuje velikost tlumení. Na obrázku jsou fázové diagramy pro řešení s dvěmi různými počátečními podmínkami. Nalevo je nulové tlumení, napravo je $\alpha = 0.3$



Samotné oscilace jsou vyjádřeny hodnotami na ose y, hodnoty x zobrazují rychlost pohybu.

Definition

Diferenciální rovnice prvního řádu je

$$F(y', y, x) = 0$$

s nějakou pevnou funkcí F, která každé trojici reálných čísel přiřadí jedno reálné číslo.

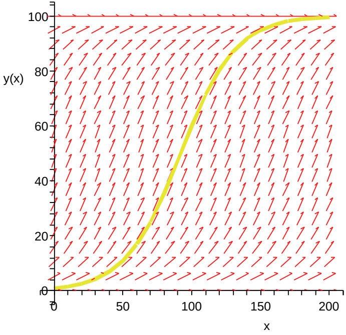
Zápis připomíná implicitně zadané funkce $y(x)$, nicméně navíc je tu závislost na derivaci hledané funkce y.
Obvykle pracujeme s rovnicemi, které jsou vyřešeny vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y),$$

dále se omezíme jen na tento případ.
Všimněme si také konvence, že z kontextu víme, která je nezávislá proměnná pro funkci y.

Taková rovnice zadává pro každou hodnotu (x, y) v rovině vektor $(1, f(x, y))$, tj. rychlost se kterou nám rovnice grafu řešení přikazuje pohybovat se rovinou. Např. pro logistický model

$$p' = p\left(-\frac{r}{K}p + r\right)$$



Intuitivně lze na základě takových obrázků očekávat, že pro každou počáteční podmínku bude existovat právě jedno řešení naší rovnice.

Užitečným typem rovnic, pro který známe elementární postup k řešení jsou tzv. *rovnice se separovanými proměnnými*:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

pro dvě dostatečně hladké funkce jedné reálné proměnné f a g. Obecné řešení tu lze získat integrací, tj. nalezením primitivních funkcí

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}, \quad F(x) = \int f(x)dx.$$

Pak totiž spočtením funkce $y(x)$ z implicitně zadaného vztahu $F(x) + C = G(y)$ s libovolnou konstantou C vede k řešení. Skutečně, derivováním této rovnosti (s použitím pravidla pro derivování složené funkce $G(y(x))$ dostaneme skutečně $\frac{1}{g(y)} \cdot y'(x) = f(x)$.

Příklad rovnice

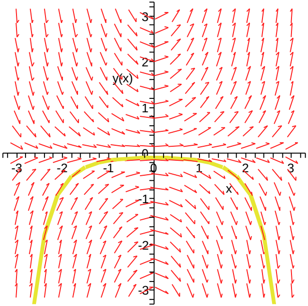
Najdeme řešení rovnice

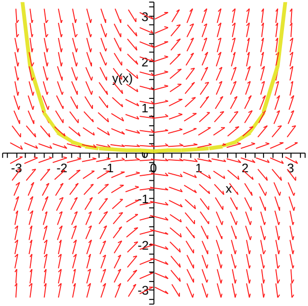
$$y'(x) = x \cdot y(x).$$

Přímým výpočtem dostaneme $\ln|y(x)| = \frac{1}{2}x^2 + C$. Odtud to vypadá (alespoň pro kladná y) na

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} = D \cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

kde D je nyní libovolná kladná konstanta.
Ve skutečnosti dostaneme všechna řešení, když uvážíme všechna reálná D



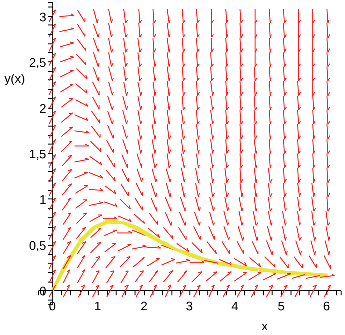


Na obrázku jsou vynesena dvě řešení, která ukazují na nestabilitu rovnice vůči počátečním podmínkám: Jestliže pro libovolné x_0 volíme y_0 blízké nule, pak se nám dramaticky mění chování výsledného řešení. Navíc si povšimněme konstatního řešení $y(x) = 0$, které odpovídá počáteční podmínce $y(x_0) = 0$.

Jestliže lehce pozměníme rovnici na

$$y'(x) = 1 - x \cdot y(x),$$

narazíme naopak na stabilní chování viditelné na následujícím obrázku. Tuto rovnici už ale neumíme řešit pomocí separace proměnných.



Zato umíme stejným postupem řešit logistický model populace.

Obecná lineární rovnice první řádu

Jde o rovnici tvaru $y' = a(t)y + b(t)$ se spojitými koeficienty $a(t)$ a $b(t)$.
V případě $b(t) = 0$ snadno najdeme řešení $y(t) = y_0 F(t, t_0)$, kde

$$F(t, s) = e^{\int_s^t a(x)dx}$$

Obecné řešení s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ je pak

$$y(t) = y_0 F(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t, s)b(s)ds.$$

Vzpomeňte podobnost s obecnou lineární diferenční rovnicí prvního řádu.

Tranformace souřadnic

homogenní rovnice $y' = f(\frac{y}{t})$ převedeme transformací $z = fracyt$ pro $t \neq 0$ na

$$z' = \frac{1}{t}(f(z) - z).$$

rovnice **Bernoulliho typu** $y' = f(t)y + g(t)y^r$, kde $r \neq 0, 1$, jsou transformací $z = y^{1-r}$ převedeny na obecnou lineární rovnici.

Existence i jednoznačnost řešení skutečně platí pro všechny rozumné funkce f, my si výsledek sformulujeme pro dosti velkou třídu rovnic takto:

Theorem (O existenci a jednoznačnosti řešení ODR)

Nechť funkce $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má spojité parciální derivace. Pak pro každý bod* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *existuje maximální interval* $[x_0 - a, x_0 + b]$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$ *jsou kladná čísla, a právě jedna funkce* $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *která je řešením rovnice*

$$y' = f(x,y)$$

a splňuje $y(x_0) = y_0$.

Náznak důkazu

Funkce $y(x)$ je řešením naší rovnice tehdy a jen tehdy, když

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(x)\,dx = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx.$$

Pravá strana tohoto výrazu je ovšem, až na konstantu, integrální operátor

$$L(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$

a při řešení diferenciální rovnice hledáme pevný bod pro tento operátor L, tj. chceme najít funkci $y = y(x)$ s $L(y) = y$.
Důkaz spočívá v odhadu, že pro dostatečně malý interval kolem x_0 bude takový operátor zmenšovat vzdálenost funkcí. Z obecné věty o kontrakci pak vyplývá hledané tvrzení.

Na řešení rovnice $y'(x) = f(x, y)$ lze také pohlížet jako na hledání (parametrizované) křivky $(x(t), y(t))$ v rovině, kde jsme již předem pevně zvolili parametrizaci proměnné $x(t) = t$. Takto můžeme nejen zapomenout na tuto pevnou volbu pro jednu proměnnou x, nýbrž hlavně přibrat libovolný počet proměnných.
Například v rovině můžeme psát takový systém ve tvaru

$$x'(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad y'(t) = g(t, x(t), y(t))$$

se dvěmi funkcemi $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se spojitými derivacemi. Obdobně pro více proměnných.

Jednoduchým příkladem v rovině může sloužit systém rovnic

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t).$$

Snadno lze uhádnout (nebo aspoň ověřit), že řešením takového systému je

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t$$

s libovolnou nezápornou konstantou R a křivky řešení budou právě parametrizované kružnice o poloměru R.
Na takové systémy umíme přímo rozšířit platnost věty o jednoznačnosti a řešení:

Theorem (O existenci a jednoznačnosti řešení systémů ODR)

Nechť funkce $f_i(t, x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ všechny mají spojité parciální derivace. Pak pro každý bod $(t_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^2$ existuje interval $[t_0 - a, t_0 + a]$, s $a \in \mathbb{R}$ kladným, a právě jedna funkce $y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, která je řešením systému rovnic

$$x_1'(x) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(x)), \ldots, x_n'(x) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(x))$$

s počáteční podmínkou

$$x_1(t_0) = z_1, \ldots, x_n(t_0) = z_n.$$

Navíc je i závislost řešení na počátečních podmínkách a případných dalších parametrech diferencovatelná.

Ve skutečnosti je možné se omezit na tzv. **autonomní systémy rovnic**, tj. ty kde pravá strana není explicitně závislá na čase t.
Obecný případ ve větě se z nich dostane stejným způsobem, jako jsme pracovali v rovině s jednou rovnicí $y'(x) = f(x, y)$.
Stejně tak je možné všechny dodatečné parametry λ zahrnout mezi proměnné, jestliže požadujeme (vektorovou) rovnost $\lambda' = 0$.
Dříve diskutovaný systém dvou autnomních rovnic, jehož řešení jsou parametrizované kružnice je dobrým příkladem.
Samotný systém rovnic (a každý obecný také) si pak můžeme představit jako „pole vektorů“ v rovině, prostoru atd., které udává „tok prostředí“. Řešením je pak křivka, která odpovídá skutečnému toku jedné „částečky“ tohoto prostředí.

Model „Lotka – Voltera“ pro dravce a kořist

Jako o něco složitější příklad si uveďme klasický populační model „dravec – kořist“, který zavedli ve dvacátých létech minulého století pánové Lotka a Volterra.
Označíme $x(t)$ vývoj počtu jedinců v populaci kořisti a $y(t)$ totéž pro dravce. Přepokládáme, že přírůstek kořisti by se řídil Malthusiánským modelem (tj. exponenciální růst), kdyby nebyli loveni. U dravce naopak očekáváme, že by bez kořisti pouze přirozeně vymíral (tj. exponenciální pokles stavů). Přitom ale ještě musíme uvážit interakci dravce s kořistí, kterou očekáváme přímo úměrnou počtu obou. Dostáváme tak tzv. Lotka–Volterra model

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \alpha x(t) - \beta y(t)x(t)\\
y'(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)
\end{aligned}
$$

Rovnice vyšších řádů

Obyčejnou diferenciální rovnicí řádu k (vyřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci) rozumíme rovnici

$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)),$$

kde f je známá funkce v $k+1$ proměnných, x je nezávisle proměnná a $y(x)$ je neznámá funkce v jedné proměnné. Ukážeme, že taková rovnice je vždy ekvivalentní systému k rovnic prvního řádu. Zavedeme nové neznámé funkce v proměnné t takto: $y_0(t) = y(t)$, $y_1(t) = y_0'(t)$, $\dots$, $y_{k-1}(t) = y_{k-2}'(t)$.

Nyní je funkce $y(t)$ řešením naší původní rovnice tehdy a jen tehdy, když je první komponentou řešení systému rovnic

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= y_1(t) \\ y_1'(t) &= y_2(t) \\ &\vdots \\ y_{n-2}'(t) &= y_{n-1}(t) \\ y_{n-1}'(t) &= f(t, y_0(t), y_1(t), \dots, y_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Přímým důsledkem vět o systémech ODR 1. řádu je proto následující věta:

Theorem

Nechť funkce $f(t, y_0, \ldots, y_{k-1}) : U \subset \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$, má spojité parciální derivace na otevřené množině U. Pak pro každý bod $(t_0, z_0, \ldots, z_{k-1}) \in U$ existuje maximální interval $I_{max} = [x_0 - a, x_0 + b]$, s kladnými $a, b \in \mathbb{R}$, a právě jedna funkce $y(t) : \mathbb{I}_{max} \to \mathbb{R}$, která je řešením rovnice k-tého řádu

$$y^{(k)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t))$$

s podmínkou $y(t_0) = z_0$, $y'(t_0) = z_1$, $\ldots$, $y^{(k-1)}(t_0) = z_{k-1}$. Toto řešení navíc závisí diferencovatelně na počáteční podmínce a případných dalších parametrech vstupujících diferencovatelně do funkce f.

Vidíme tedy, že pro jednoznačné zadání řešení obyčejné diferenciální rovnice k–tého řádu musíme zadat v jednom bodě hodnotu a prvních $k-1$ derivací výsledné funkce. Obdobně lze diskutovat systémy rovnic libovolných řádů.

Operace derivování je lineární zobrazení z (dostatečně) hladkých funkcí do funkcí. Pokud derivace $(\frac{d}{dx})^j$ jednotlivých řádů j vynásobíme pevnými funkcemi $a_j(x)$ a výrazy sečteme, dostaneme tzv. *lineární diferenciální operátor*:

$$y(x) \mapsto D(y)(x) = a_k(x)y^{(k)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0 y(x).$$

Řešit příslušnou *homogenní lineární diferenciální rovnici* pak znamená najít funkci y splňující $D(y) = 0$, tj. obrazem je identicky nulová funkce.
Ze samotné definice je zřejmé, že součet dvou řešení bude opět řešením, protože pro libovolné funkce y_1 a y_2 platí

$$D(y_1 + y_2)(x) = D(y_1)(x) + D(y_2)(x).$$

Obdobně je také konstantní násobek řešení opět řešením. Celá množina všech řešení lineární diferenciální rovnice k-tého řádu je tedy vektorovým prostorem.

Přímou aplikací předchozí věty o jednoznačnosti a existenci řešení rovnic dostáváme:

Corollary

Vektorový prostor všech řešení homogenní lineární diferenciální rovnice k–tého řádu je vždy dimenze k. Proto můžeme vždy řešení zadat jako lineární kombinaci libovolné množiny k lineárně nezávislých řešení. Taková řešení jsou zadána jednoznačně lineárně nezávislými počátečními podmínkami na hodnotu funkce $y(x)$ jejích prvních $(k-1)$ derivací.

Připomeňme homogenními lineární diferenční rovnice. Analogie jde i dále v okamžiku, kdy jsou všechny koeficienty a_j diferenciálního operátoru D konstantní. Už jsme viděli u takové rovnice prvního řádu, že řešením je exponenciála s vhodnou konstantou u argumentu. Stejně jako u diferenčních rovnic se podbízí vyzkoušet, zda takový tvar řešení $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ s neznámým parametrem λ může splnit rovnici k–tého řádu. Dosazením dostaneme

$$D(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \left(a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0(x)\right)\mathrm{e}^{\lambda x}\,.$$

Parametr λ tedy vede na řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty tehdy a jen tehdy, když je λ kořenem tzv. *charakteristického polynomu* $a_k\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0$.

Pokud má charakteristický polynom k různých kořenů, dostáváme bázi celého vektorového prostoru řešení. Pokud je λ násobný kořen, přímým výpočtem s využitím toho, že je pak také kořenem derivace charakteristického polynomu, dostaneme, že je řešením i funkce $x\,\mathrm{e}^{\lambda x}$. Podobně pak pro vyšší násobnost ℓ dostáváme ℓ různých řešení $\mathrm{e}^{\lambda}, x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{\ell}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$.

U obecné lineární diferenciální rovnice předepisujeme nenulovou hodnotu diferenciálního operátoru D. Opět úplně analogicky k úvahám o systémech lineárních rovnic nebo u lineárních diferenčních rovnic přímo vidíme, že obecné řešení takovéto (nehomogenní) rovnice

$$D(y)(x) = b(x)$$

pro nějakou pevně zadanou funkci $b(x)$ je součtem jednoho jakéhokoliv řešení této rovnice a množiny všech možných řešení příslušné homogenní rovnice $D(y)(x) = 0$. Celý prostor řešení je tedy opět pěkný konečněrozměrný afinní prostor, byť ukrytý v obrovském prostoru funkcí.