PB165 – Grafy a sítě

Grafy a algoritmy v komunikačních sítích

Organizační pokyny

Průsvitky

- pruběžná aktualizace v IS Studijní materiály

Odpovědníky v IS

- příklady na procvičení k jednotlivým přednáškám
- procvičení i dalších základních grafových témat, které byste měli znát

Hodnocení

- vnitrosemestrální písemná práce
  - body započítány 20% do výsledné známky
  - termín: na páté (15.10.) nebo šesté (22.10.) přednášce, upřesněno nejpozději 1.10.
  - 50 minut, cca 5 příkladů z obsahu proběhlých přednášek
- závěrečná písemná práce
  - body započítány 80% do výsledné známky
- podle dosažených procent:
  A $\langle 100, 89)$, B $\langle 89, 79)$, C $\langle 79, 69)$, D $\langle 69, 59)$, E $\langle 59, 55\rangle$

Obsah předmětu

- Návaznost na IB000 Matematické základy informatiky
  - zopakujte si studijní materiály IB000 ke grafům
  - vybrané hlavní koncepty stručně zopakujeme

1. Síťové grafy
   - 1-2 přednášky, Rudová
2. Plánování a rozvrhování na síťových grafech
   - 4-5 přednášek, Rudová
3. Modelování sítí
   - Hladká & Matyska

Obsah první části předmětu

1. Úvod do technik diskrétní matematiky pro podporu návrhu a řízení komunikačních sítí
2. Grafově teoretický koncept
3. Ukázky aplikací v komunikačních sítích

Proč diskrétní matematika a sítě?

- Teorie grafů je důkladně rozpracována a nabízí mnoho využitelných algoritmů.
- Graf představuje velmi přímočarou reprezentaci sítě na všech úrovních OSI modelu, např.:
  - Síťové prvky a jejich fyzické propojení na nejnižší vrstvě,
  - síťové aplikace a TCP spojení mezi nimi na transportní vrstvě,
  - procesy distribuovaného výpočtu a jejich komunikace na aplikační vrstvě.
- Grafy nacházejí využití i v návrhu síťových protokolů a jejich formální verifikaci.

Diskrétní matematika

- Diskrétní struktury
  - grafy
  - hypergrafy
  - kombinatorika
- Algoritmy
  - procedurální popis „krok za krokem“ problémů, které nelze řešit bezprostředně
  - složitost, NP - těžké problémy
- Matematická optimalizace
  - vývoj a implementace pro podporu rozhodování
  - problém návrhu sítí, identifikace úzkých míst
  - obchodní aspekty sítí
  - modeluje se grafy
- Distribuované výpočty
  - síť jako distribuovaný systém
  - příklad směrovací algoritmy, P2P sítě

Obsah: Typy grafů používané v počítačových sítích

- Graf, orientovaný graf, ohodnocený graf — opakování
- Multigraf
- Strom — opakování
- Kořenový strom
- n-ární strom, uspořádaný strom
- Binární strom

+

- Aplikace grafů v počítačových sítích
- Implementace grafů

Grafy a sítě

Nejjednodušší diskrétní strukturou pro modelování síťových problémů jsou grafy. Intuitivně se graf skládá z:

- Vrcholů (uzlů), znázorňovaných schematicky jako „body“,
- hran spojujících vrcholy.

Co lze reprezentovat grafem?

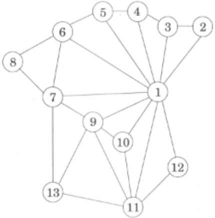
- Mapu měst a silničního spojení,
- atomy v molekule a jejich vazby,
- vodovodní, elektrické sítě

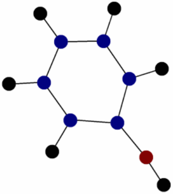
a zejména

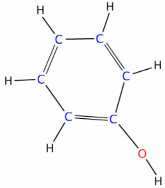
- počítačové sítě.

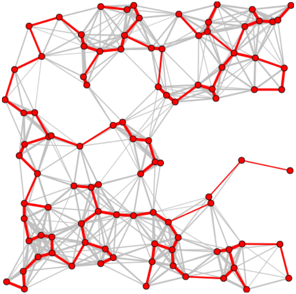
Označován také jako jednoduchý graf.

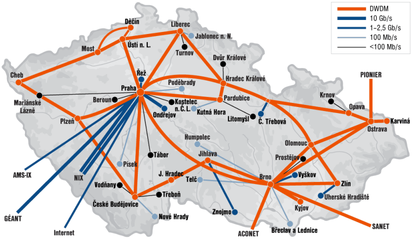
Grafy a sítě - příklady











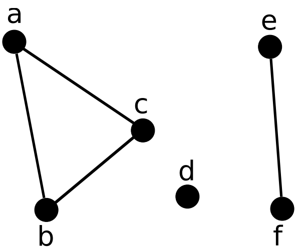
Opakování: definice grafu

Definice

Graf G je uspořádaná dvojice množin (V, E), kde

- *V je množina vrcholů a*
- *E je množina hran – dvouprvkových podmnožin množiny V*

Vrcholy spojené hranou se nazývají sousední. Hrana se označuje jako incidentní k vrcholům, které spojuje.



$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d, e, f\} \\
E &= \{ \quad \{a, b\}, \\
&\qquad\quad \{a, c\}, \\
&\qquad\quad \{b, c\}, \\
&\qquad\quad \{e, f\} \quad \}
\end{aligned}
$$

Opakování: Orientovaný graf

Hrany v grafu, jak byly definovány, spojují dva rovnocenné vrcholy. Takové grafy se také nazývají neorientované. U hran ovšem můžeme vyznačit směr, kterým vedou – hrany i graf se poté nazývají orientované.

Definice

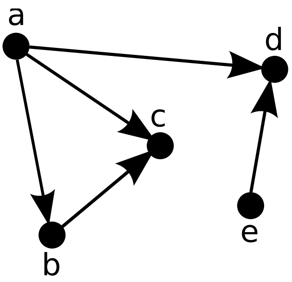
Graf, jehož hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů, se nazývá orientovaný.

O hraně (u, v) říkáme, že vychází z vrcholu u a vstupuje do vrcholu v. Graficky se orientace hrany označí šipkou ve směru, kterým hrana vede.

Orientovaný graf - příklady

Kde najdeme orientované grafy v sítích?

- Webové stránky – graf odkazů
- DNS – hierarchická struktura domén, serverů
- Směrování – graf cest paketů k cíli



$$V = \{a, b, c, d, e\}$$
$$E = \{ (a, b), (a, c), (b, c), (a, d), (e, d) \}$$

Multigraf

Definice grafu povoluje nejvýše 1 hranu mezi každou dvojicí vrcholů a požaduje, aby hrana spojovala různé vrcholy. Tato omezení odstraňuje multigraf:

Definice

Multigraf je graf, jenž nahrazuje množinu hran multimnožinou (smí obsahovat násobné prvky) a umožňuje existenci smyček – hran spojujících vrchol sám ze sebou.

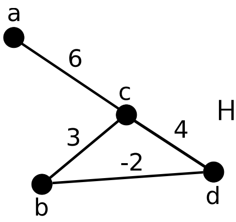
Multigraf lépe odpovídá reálným fyzickým sítím, kde se často vyskytují redundantní linky.
Smyčky mohou znázornit např. loopback – rozhraní přijímající zprávy, které samo vysílá.

Opakování: Ohodnocení grafu

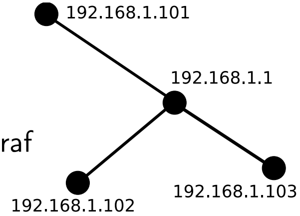
Vrcholům a hranám je možné přiřadit např. číslo či barvu.

Definice

*Přiřazení prvků konečné množiny vrcholům či hranám grafu nazýváme jejich **ohodnocením**.*



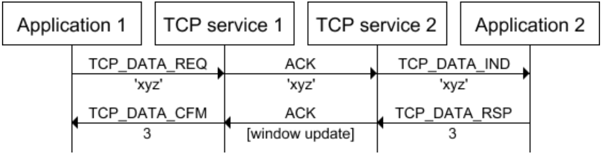
Hranově ohodnocený graf



Vrcholově ohodnocený graf

Příklady ohodnocení na sítích

- Ohodnocení síťových zařízení L2 a L3 adresami (viz ARP protokol)
- Šířka pásma, latence, cena přenosu za jednotku dat jako ohodnocení linek – hran
- Ohodnocení vrcholů názvem stavu, hran typem zprávy při abstraktním návrhu protokolů (MSC – Message Sequence Charts)



MSC datového přenosu pro TCP

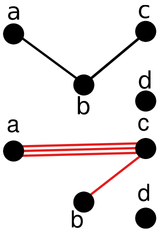
Stupeň vrcholu

Definice

Stupněm vrcholu v neorientovaném grafu nazýváme počet hran incidentních k vrcholu.

- Počet klientů připojených k Wi-Fi AP
- Počet uzavřených spojení spojovaného protokolu (např. TCP)

Stupeň vrcholu u značíme $deg(u)$.



$deg(a) = 1$ $\quad deg(c) = 1$
$deg(b) = 2$ $\quad deg(d) = 0$

$deg(a) = 3$ $\quad deg(c) = 4$
$deg(b) = 1$ $\quad deg(d) = 0$

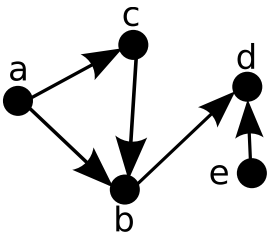
Stupeň vrcholu v orientovaném grafu

V případě orientovaného grafu rozlišujeme vstupní a výstupní stupeň.

Definice

Vstupním (výstupním) stupněm vrcholu u neorientovaného grafu nazýváme počet hran vstupujících do, resp. vycházejících z vrcholu u a značíme jej $deg^{+}(u)$, *resp.* $deg^{-}(u)$.

- V grafu odkazů mezi webovými stránkami reprezentuje vstupní stupeň počet odkazů na vedoucích stránku.



vrchol	deg^{-}	deg^{+}
a	2	0
b	1	2
c	1	1
d	0	2
e	1	0

Sledy v grafu

Definice

Sledem v grafu (neorientovaném grafu) nazýváme posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n,$$

kde každá hrana e_i *spojuje vrcholy* v_{i-1}, v_i, *resp. vede z* v_{i-1} *do* v_i.

Sled v grafu je tedy „trasou“, na které se mohou vrcholy i hrany opakovat. Se sledy se lze setkat i v reálných sítích:

- Cesta paketu sítí (některé směrovací algoritmy nezabraňují zacyklení paketu v průběhu výpočtu).

Samostatný vrchol je také sledem.

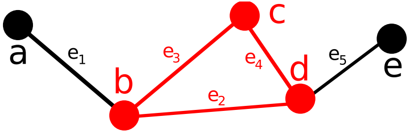
Cesty v grafu

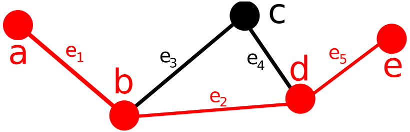
Definice

Cesta v grafu je sled bez opakování vrcholů.

V cestě se v důsledku neopakování vrcholů nemohou opakovat ani hrany.

- Cesty definující směrování paketů mezi dvojicemi síťových prvků.





$b, e_3, c, e_4, d, e_2, b$ je sledem v grafu, ale nikoliv cestou – vrchol b se opakuje.

$a, e_1, b, e_2, d, e_5, e$ je sledem i cestou v grafu.

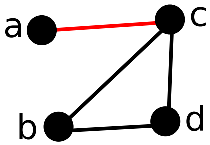
Souvislost grafu

Definice

Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi jeho každými dvěma vrcholy vede cesta.

Definice

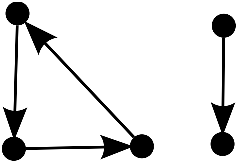
Nahradíme-li všechny hrany orientovaného grafu G neorientovanými a získáme-li tak souvislý graf, G je slabě souvislý.
Orientovaný graf je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vedou cesty v obou směrech.

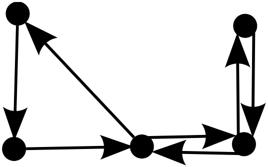


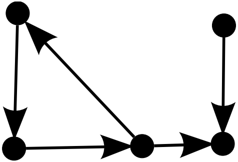
Tento graf je souvislý; po odebrání vyznačené hrany by souvislý nebyl, odebrání jedné z nevyznačených hran by jeho souvislost zachovalo.

Souvislost grafu – příklady

- Internet na fyzické vrstvě tvoří souvislý graf.
- Internet na IP vrstvě tvoří slabě souvislý (ovšem silně nesouvislý) orientovaný graf (adresy za NAT).
- Orientovaný graf webových stránek není silně ani slabě souvislý.







Grafy na obrázcích jsou:

1. Nesouvislý
2. Slabě souvislý
3. Silně souvislý

Implementace grafu

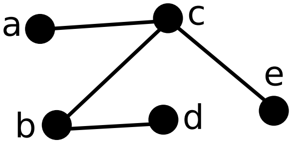
Jak efektivně uložit graf v paměti počítače či aktivního síťového prvku? Vrcholy označíme čísly $1 \dots n$. Pro uložení hran máme dvě základní možnosti:

- matice sousednosti,
- seznamy sousedů.

Matice sousednosti

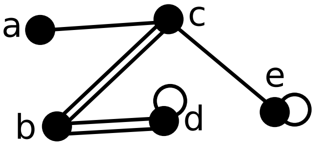
- matice E o rozměrech $n \times n$ pro n vrcholů grafu
- $E_{ij} = 1$ pokud hrana (i, j) patří do grafu
- $E_{ij} = 0$ jinak
- pro neorientovaný graf je symetrická
  pro orientovaný graf nemusí být symetrická

Matice sousednosti



	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	1	1	0
c	1	1	0	0	1
d	0	1	0	0	0
e	0	0	1	0	0

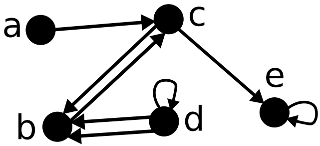
V této podobě je matice sousednosti vhodná jen pro reprezentaci jednoduchého grafu. Multigraf lze reprezentovat maticí sousednosti, jejíž prvky udávají počet hran mezi každými dvěma vrcholy:



	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	2	2	0
c	1	2	0	0	1
d	0	2	0	1	0
e	0	0	1	0	1

Obdobně lze ukládat jednoduchý hranově ohodnocený graf.

Matice sousednosti pro orientovaný multigraf



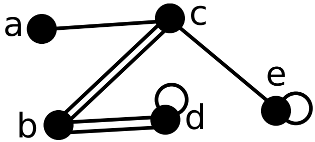
	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	1	0	0	1
d	0	2	0	1	0
e	0	0	0	0	1

Seznamy sousedů

Pro každý vrchol existuje samostatný seznam sousedů, s nimiž je vrchol spojen hranou (či do nich vede orientovaná hrana).

- Lze implementovat pomocí 2 jednorozměrných polí:
  - V jednom jsou uloženy všechny seznamy za sebou, seřazené podle čísla vrcholu
  - Druhé uchovává indexy, na kterých začínají v prvním poli sousedé každého vrcholu
- Násobné hrany v multigrafu jsou zadány násobným uvedením vrcholu v seznamu sousedů
- Pro „řídké" grafy (výrazně méně než n^2 hran) jsou seznamy sousedů výhodnější z hlediska paměťové náročnosti než matice sousednosti. Takových grafů je mezi sítěmi většina.

Seznamy sousedů – příklad



Pole indexů do seznamu sousedů:

a	b	c	d	e
1	2	6	10	13

Seznam sousedů:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c	c	c	d	d	a	b	b	e	b	b	d	c	e

Kružnice a cyklus v grafu

Definice

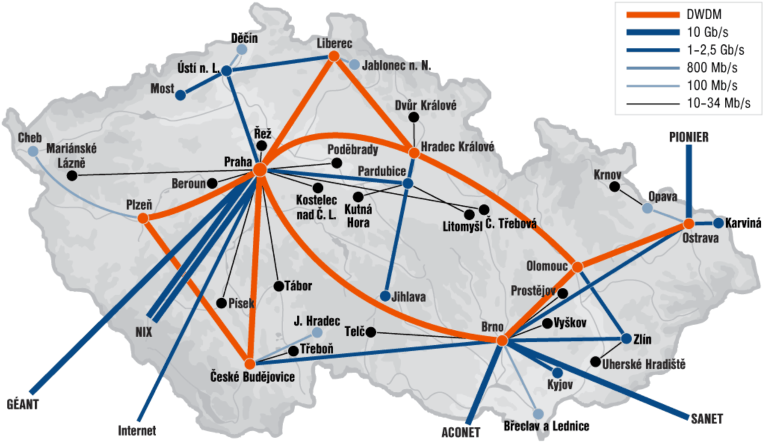
Kružnice (uzavřená cesta) v grafu je netriviální neorientovaná cesta, která začíná i končí ve stejném vrcholu. Orientovaná kružnice (také cyklus) je kružnice složená z orientovaných hran respektující orientaci těchto hran.*

* triviální cesta obsahuje jeden vrchol

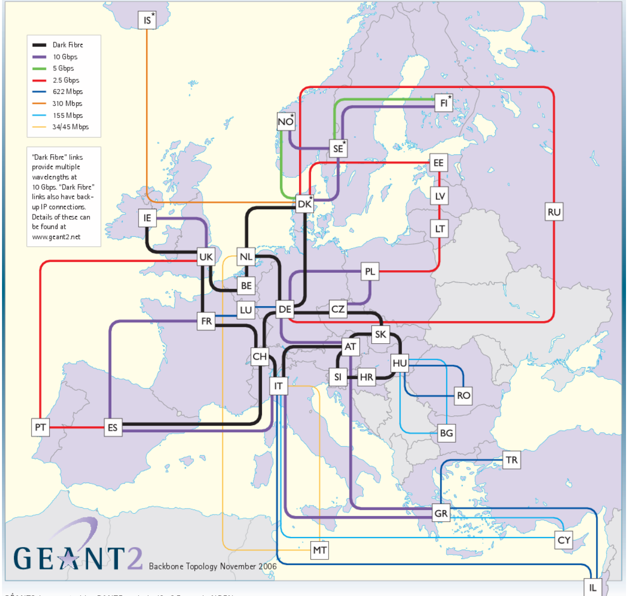
Příklady

- V Internetu existuje mnoho redundantních linek – graf jeho fyzického propojení je cyklický.
- Lokální ethernetové sítě mají acyklickou topologii.
- Sítě založené na technologii Token Ring mají logickou kruhovou topologii.
- Sítě SONET podporují zapojení do kruhu.

Topologie sítě CESNET



Topologie sítě GÉANT



GÉANT2 is operated by DANTE on behalf of Europe's NRENs.

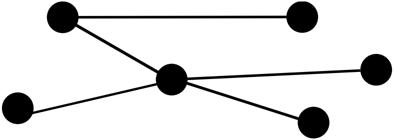
Opakování: Strom

Definice

Les je graf, který neobsahuje kružnice. Strom je graf, který neobsahuje kružnice a je souvislý.

- Strom je tedy souvislý les.
- Lokální ethernetová síť je strom, protože je souvislá a acyklická.

Jednoduchý příklad stromu



Kořenový strom

Definice

Strom, jehož hrany jsou orientované, se nazývá také orientovaný.

Orientovaný strom, jenž má určen význačný vrchol (kořen) r, a v němž existuje orientovaná cesta z r do všech ostatních vrcholů, se nazývá kořenový strom.

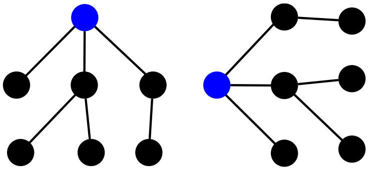
- Při kreslení kořenových grafů se obvykle vynechávají šipky definující orientaci hran, předpokládá se, že směřují „od kořene".
- Vzhledem k absenci cyklů je interpretace jednoznačná.

Kořenový strom – příklady

Kde v sítích najdeme kořenové stromy?

- DNS – hierarchická struktura serverů obsluhujících domény různých úrovní.
- Multicast – zdroj je kořenem, cesty k příjemcům tvoří strom.

Dvě obvyklá kreslení kořenového stromu. Kořen je vyznačen modře.



Vztah orientovaných a kořenových stromů

Každý kořenový strom je orientovaný. Jaké jsou podmínky pro to, aby byl orientovaný strom zároveň kořenovým?

Věta

Orientovaný strom je kořenový právě tehdy, když právě jeden z jeho vrcholů má vstupní stupeň 0 a všechny ostatní vrcholy 1.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Nechť r je kořen stromu a jeho vstupní stupeň je vyšší než 0. Potom do něj vede hrana z některého z ostatních vrcholů stromu. Do toho ovšem vede cesta z kořene, v grafu je tedy cyklus, čímž docházíme ke sporu.
Pokud do některého z ostatních vrcholů (označme jej u) vedou více než 2 hrany (z různých vrcholů v, w), potom do něj vedou 2 cesty z kořene, a to skrze cesty do v, w. Tím opět docházíme ke sporu. $\square$

Vztah orientovaných a kořenových stromů – pokračování důkazu

Orientovaný strom je kořenový právě tehdy, když právě jeden z jeho vrcholů má vstupní stupeň 0 a všechny ostatní vrcholy 1.

Důkaz.

$\Leftarrow$ Označme r vrchol, jehož vstupní stupeň je 0. Poté pro každý jiný vrchol w platí následující:

- Vstupní stupeň w je roven 1. Existuje tedy právě jeden vrchol, u_1, z nějž vede do w hrana. Není-li u_1 totožný s r, vede do něj opět hrana z právě jednoho vrcholu, u_2. Takto tvořená řada vrcholů, z nichž vede cesta do w, je nutně konečná, neboť strom je acyklický, tudíž se v ní žádný z vrcholů nemůže opakovat. Posledním vrcholem v této posloupnosti musí být r.

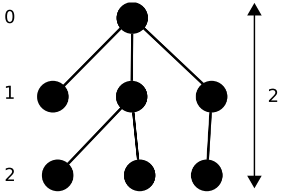
Do každého vrcholu stromu tedy vede orientovaná cesta z vrcholu r a ten je tudíž kořenem stromu. $\square$

Hloubka vrcholů a výška stromů

Definice

Vzdálenost (počet hran na cestě) vrcholu od kořene stromu se nazývá hloubka či úroveň vrcholu.

- Hloubka kořene je rovna 0.
- Je zvykem kreslit vrcholy jedné úrovně ve stejné výšce.



Definice

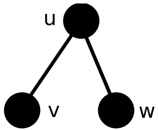
Výškou kořenového stromu označujeme nejvyšší z hloubek všech jeho vrcholů.

Rodiče a sourozenci v kořenových stromech

Definice

Vede-li v kořenovém stromu hrana z vrcholu u do v, nazývá se u rodičem (otcem) v a v synem (potomkem). Vrcholy mající společného rodiče nazýváme sourozenci.

Vrchol u je rodičem obou vrcholů v, w, které jsou sourozenci.

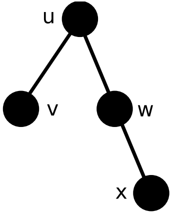


Listy a vnitřní vrcholy stromu

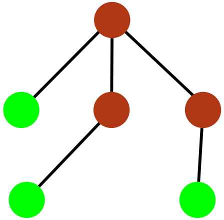
Definice

Vrchol u je předkem vrcholu v, pokud leží na cestě z r do v. v se v takovém případě nazývá následníkem vrcholu u.

Vrcholy v, w, x jsou následníky vrcholu u. Vrchol w má jediného následníka x. Předky x jsou u, w.



Listy jsou vyznačeny zeleně, vnitřní vrcholy stromu hnědě.



Definice

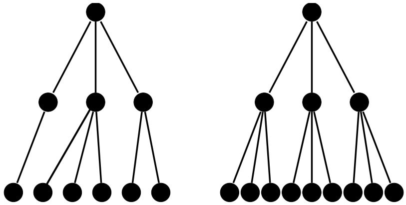
Vrchol, který nemá žádné potomky, nazýváme list stromu.
Ostatní vrcholy se označují jako vnitřní.

n-ární, úplné stromy

Definice

Kořenový strom, jehož každý vrchol má nejvýše n potomků, se nazývá n-ární. n-ární strom, jehož vnitřní vrcholy mají právě n potomků a všechny listy jsou stejné hloubky, se nazývá úplný n-ární.

Levý strom je 3-ární (ternární), pravý je úplný ternární.



Uspořádané stromy

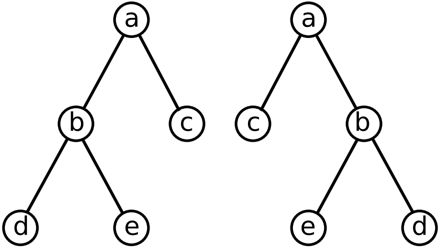
V některých případech může být výhodné potomky každého vrcholu jednoznačně pojmenovat a seřadit:

Definice

Uspořádaný strom je kořenový strom s daným pořadím potomků každého vrcholu.

Při kreslení uspořádaného grafu se dané pořadí vrcholů dodržuje ve směru zleva doprava.

Isomorfní * kořenové stromy s různým uspořádáním.



* Zopakujte si pojem isomorfismus.

Počet vrcholů úrovně stromu

Pro každou úroveň n-árního stromu je dán limit počtu vrcholů v této úrovni:

Věta

V m-té úrovni n-árního stromu se nachází nejvýše n^m *vrcholů.*

Důkaz.

Indukcí:
Pro kořen platí triviálně: $n^0 = 1$.
Nechť je v úrovni k právě n^k vrcholů. Každý z nich může mít nejvýše n potomků. Úroveň $k+1$ tedy obsahuje nejvýše $n * n^k = n^{k+1}$ vrcholů. □

Kořenové stromy – cvičení

1. Nakreslete, nebo zdůvodněte, proč to není možné:
   1. Binární strom výšky 5 s právě 12 vrcholy a právě 5 listy.
   2. Binární strom výšky 3 s právě 12 vrcholy.
2. Kolik existuje různých neúplných ternárních stromů výšky 3 takových, že každý vnitřní vrchol má právě 3 potomky?

Binární stromy

Speciálním (a prakticky nejpoužívanějším) n-árním stromem je strom binární.

Definice

Uspořádaný 2-ární strom se nazývá binární. Potomci každého vrcholu jsou označováni jako levý a pravý.

- Každý kořenový strom lze převést na binární.
- Vnitřní algoritmy směrovacích zařízení mohou být založeny na binárních stromech.

Podstromy binárních stromů

Definice

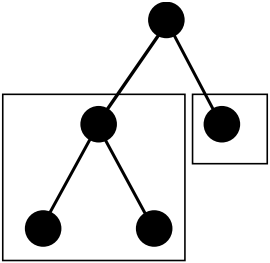
Indukovaný podgraf binárního stromu G, tvořený jedním potomkem vrcholu v a všemi jeho následníky, se nazývá* **podstromem** *vrcholu v a stromu G.*

- Podstrom binárního stromu je také binárním stromem.
- Každý vrchol má **levý** a **pravý** podstrom, přičemž jeho levý, resp. pravý, potomek je kořenem tohoto podstromu.
- Pravý a levý podstrom binárního stromu o výšce h mají výšku nejvýše $h-1$, přičemž nejméně jeden z nich má výšku právě $h-1$.

* Zopakujte si pojmy podgraf a indukovaný podgraf.

Podstromy binárních stromů – příklad

Obrázek: Levý a pravý podstrom kořene stromu.



Počet vrcholů úplného binárního stromu

Věta

Úplný binární strom výšky h má právě $2^{h+1} - 1$ vrcholů.

Důkaz.

Indukcí:
Pro binární strom výšky 0 platí zřejmě.
Nechť strom výšky k má právě $2^{k+1} - 1$ vrcholů. Jak bylo dokázáno dříve*, $(k + 1)$-ní vrstva obsahuje 2^{k+1} vrcholů. Strom výšky $k + 1$ tedy má

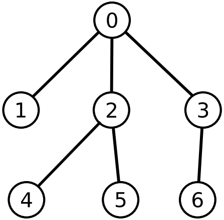
$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 * 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

vrcholů. □

* Víme: V m-té úrovni n-árního stromu se nachází nejvýše n^m. vrcholů.

Reprezentace kořenových stromů

- Kořenové stromy lze jednoznačně reprezentovat polem rodičů – tedy polem, ve kterém je pro každý vrchol uložen pouze název jeho rodiče.
- Taková reprezentace je prostorově velmi výhodná (lineární prostorová složitost).



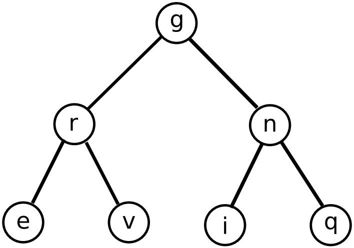
Pole rodičů má tvar: - 0 0 0 2 2 3.

Cvičení:

- Nakreslete kořenový strom podle zadaného pole rodičů:
  - 0 1 1 2 2 3 4 4

Reprezentace úplných ohodnocených stromů

- Obdobně výhodně lze reprezentovat úplné ohodnocené stromy.
- Každý vrchol může mít v lineárním poli pevně danou pozici.
- Na této pozici je v poli uloženo ohodnocení vrcholu.
- Konkrétně pro binární strom:
  - Kořen je uložen na pozici 0.
  - Potomci vrcholu k jsou uloženi na pozicích $2 * k + 1, 2 * k + 2$.



Pole reprezentující tento binární graf obsahuje hodnoty `g r n e v i q`.

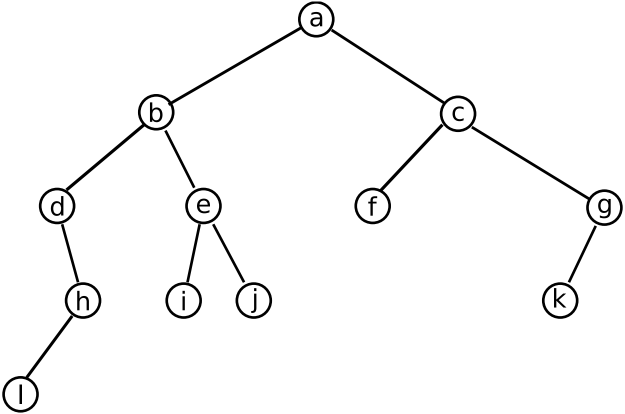
Průchod binárním stromem

V některých případech (např. synchronizace distribuovaných algoritmů a výpočtů) je potřebné projít všemi vrcholy grafu a vykonat nějakou akci. Průchod binárním stromem je možné provést 2 základními způsoby:

1. průchod po úrovních
2. průchod po podstromech

Průchod binárním stromem po úrovních

```
Vlož kořen do fronty.
Dokud je fronta neprázdná:
  Odstraň její první vrchol a proveď akci.
  Vlož do fronty jeho potomky v daném pořadí.
```



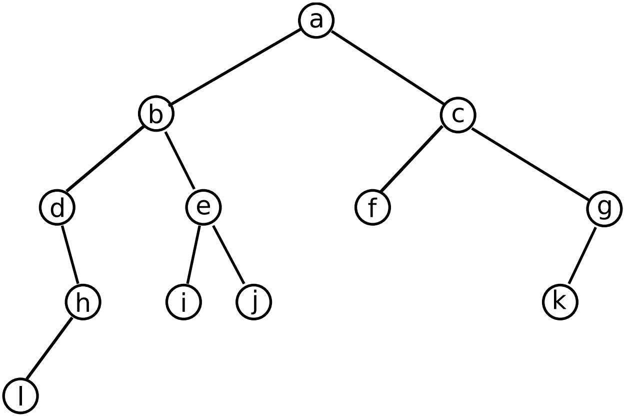
Vrcholy stromu jsou navštíveny v pořadí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$.

Průchod binárním stromem po podstromech

```
Proveď akci v kořenu stromu.
Spusť algoritmus průchodu v levém podstromu.
Spusť algoritmus průchodu v pravém podstromu.
```

- Tato verze algoritmu je rekurzivní. Průchod je možné implementovat iterativně bez rekurzivních volání za použití zásobníku.
- Akci lze také provádět po průchodu levým či oběma podstromy.

Průchod po podstromech – příklad



Vrcholy stromu jsou navštíveny v pořadí $a, b, d, h, l, e, i, j, c, f, g, k$.

Cvičení:
V jakém pořadí budou vypsány vrcholy, pokud bude výpis vrcholu proveden 1) po průchodu levým podstromem; 2) po průchodu oběma podstromy?