IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 6 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Vlastnosti relací. Ekvivalence, rozklad množiny, třídy ekvivalence. Uspořádání, předuspořádání. Minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádaných množin. Horní a dolní závora, suprémum a infimum. Relace pokrytí na uspořádané množině. Hasseovské diagramy.

Příklad 1.

a) Dokažte, že každé uspořádání je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.
b) Dokažte, že každá ekvivalence je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.

Řešení

a) Nechť M je libovolná množina a nechť $R \subseteq M \times M$ je libovolné uspořádání na M. Potom R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace. Protože je relace R reflexivní a tranzitivní, je to předuspořádání.

Abychom dokázali, že obrácené tvrzení neplatí, nalezneme předuspořádání, které není uspořádáním. Nechť $M = \{a, b\}$ a $R = M \times M$. Důkaz, že R je hledaná relace, tedy že R je reflexivní a tranzitivní, ale není antisymetrická, ponecháváme čtenáři.

b) Nechť M je libovolná množina a nechť $R \subseteq M \times M$ je libovolná ekvivalence na M. Potom R je zejména reflexivní a tranzitivní, je to tedy předuspořádání.

Abychom ukázali, že obecné tvrzení neplatí, nalezneme předuspořádání, které není ekvivalencí. Nechť $M = \{a, b, c\}$ a $R = \mathrm{id}_M \cup \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$.

Příklad 2.

Rozhodněte, které z následujících relací jsou předuspořádání, uspořádání, resp. úplná uspořádání. Svá tvrzení dokažte. Pokud je to nutné, tak v definicích předpokládáme, že $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádné množiny.

a) $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{a, b, c\}$
b) $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{a, b, c\}$
c) $R = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\} \subseteq 2^A \times 2^A$
d) $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$
e) $R = \{((a, b), (c, d)) \mid a \leq_A c \text{ a } d \leq_A b\} \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$
f) $R = \{(a, b) \mid \exists\, c \in M : a = b + c\} \subseteq M \times M$, kde $M = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$
g) $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
h) $R = \{((a, b), (a, c)) \mid b \leq_B c\} \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$
i) $R = \{(X, Y) \mid \overline{X} \subseteq \overline{Y}\} \subseteq 2^A \times 2^A$

Řešení

a) Relace R je sice tranzitivní a antisymetrická, není však reflexivní. Například $(a, a,) \notin$ $\notin R$. Proto se nejedná ani o předuspořádání, ani o uspořádání.

b) Relace R je reflexivní, tranzitivní i antisymetrická. Jedná se proto o uspořádání. Toto uspořádání není úplné, protože $(a, b) \notin R$ a $(b, a) \notin R$ (prvky a a b jsou nesrovnatelné).

c) Relace R je reflexivní, protože $X \subseteq X$ platí pro každou množinu X. Relace je tranzitivní, protože pro libovolné tři množiny X, Y, Z, pro které platí $X \subseteq Y$ a $Y \subseteq Z$, platí také $X \subseteq Z$. (Detailně to dokažte!) Relace je antisymetrická. Nechť X, Y jsou dvě libovolné množiny. Nechť platí $X \subseteq Y$ a $Y \subseteq X$. Potom $X = Y$.

Uspořádání to není úplné. Nechť $A = \{a, b\}$. Potom množiny $\{a\} \in 2^A$ a $\{b\} \in 2^A$ jsou nesrovnatelné.

d) Připomeňme, že definici funkce $f : A \to B$ rozšiřujeme na množiny M, $M \subseteq A$ předpisem $f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}$.

Relace R je reflexivní, protože $f(A) = f(A)$. Tranzitivita R plyne z tranzitivity inkluze množin. (Dokažte tranzitivitu i detailně!) Relace R je tedy jistě předuspořádání. Relace R není uspořádání, protože není antisymetrická. Uvažme totiž $A = B = \{a, b\}$ a funkce $f = \{(a, a), (b, b)\}$ a $g = \{(a, b), (b, a)\}$. Potom $f(A) = g(A)$, tedy $(f, g) \in R$, a zároveň $g(A) = f(A)$, tedy $(g, f) \in R$. Přitom $f \neq g$.

e) Uvědomte si, že $\leq_A$ a $\leq_B$ jsou uspořádání. Můžeme tedy využít toho, že jako relace mají příslušné vlastnosti.

Relace R je reflexivní. Nechť $a, b \in A$ jsou libovolné. Potom $((a, b), (a, b)) \in R$, protože $a \leq_A a$ a $b \leq_A b$.

Relace R je tranzitivní. Nechť $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A \times A$ jsou libovolné. Nechť platí $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ a $((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in R$. Potom $a_1 \leq_A a_2 \leq_A a_3$, tedy $a_1 \leq_A a_3$. Zároveň $b_3 \leq_A b_2 \leq_A b_1$, tedy $b_3 \leq_A b_1$. Celkem $((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in R$.

Relace R je antisymetrická. Nechť $(a, b), (c, d) \in A \times A$ jsou libovolné a platí $((a, b), (c, d)), ((c, d), (a, b)) \in R$. Potom $a \leq_A c$ a zároveň $c \leq_A a$, tedy $a = c$. Současně $d \leq_A b$ a zároveň $b \leq_A d$, tedy $b = d$. Celkem dostáváme $(a, b) = (c, d)$.

Relace R není úplné uspořádání. V podstatě se totiž jedná o uspořádání po složkách součinu uspořádaných množin $(A, \leq_A)$ a $(A, \geq_A)$, kde $\geq_A = \leq_A{}^{-1}$. Lze tedy použít analogický protipříklad. (Napište jej!) Právě jsme použili tvrzení: pokud $R \subseteq M \times M$ je uspořádání, potom R^{-1} je také uspořádání. Dokažte toto tvrzení! Rozmyslete si, zda analogické tvrzení platí pro předuspořádání, resp. úplné uspořádání.

f) Relace R je reflexivní, protože $0 \in M$ a $a + 0 = a$ pro každé $a \in \mathbb{N}_0$. Relace R je tranzitivní. Nechť $a, b, c \in M$, $(a, b), (b, c) \in R$. Potom existují $d_1, d_2 \in M$ tak, že $a = b + d_1$ a $b = c + d_2$. Celkem dostáváme $a = c + d_1 + d_2$. Zbývá ukázat, že $d_1 + d_2 \in M$. To ovšem platí, protože a, c, d_1 i d_2 jsou nezáporná, takže musí platit $0 \leq d_1 + d_2 \leq$ $\leq a \leq n$. Symbol $\leq$ zde reprezentuje standardní uspořádání přirozených čísel. Relace R je antisymetrická. Nechť pro $a, b \in M$ platí $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$. Potom existují $c_1, c_2 \in M$ taková, že $a = b + c_1$ a $b = a + c_2$. Odtud dostáváme $a = a + c_1 + c_2$. Protože c_1 i c_2 je nezáporné, musí platit $0 = c_1 = c_2$, odkud $a = b$.

Uspořádání je úplné. Nechť $a, b \in M$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \leq b$. Potom existuje $c \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq c \leq b \leq n$ takové, že $b = a + c$. Vzhledem k podmínkám kladeným na c musí platit $c \in M$ a tedy $(b, a) \in R$.

g) Relace R je reflexivní. Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Je-li $a < 0$ nebo $a > 0$, potom $a \cdot a > 0$, tedy $(a, a) \in R$. Je-li $a = 0$, potom $(0, 0) \in R$ přímo z definice.

Relace je tranzitivní. Nechť $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b), (b, c) \in \mathbb{Z}$. Rozlišíme tři případy podle hodnoty b. Pokud $b = 0$, potom $a \leq 0 \leq c$, odkud $(a, b) \in R$. (Tyto kroky nejsou tak zřejmé. Dobře si je promyslete!) Pokud $b < 0$, potom $a < 0$. Rozlišíme dva podpřípady podle c. Pokud $c < 0$, potom $a \cdot c > 0$ a $(a, c) \in R$. Pokud $0 \leq c$, potom $a < c$ a také $(a, c) \in R$. Pokud $0 < b$, je důkaz analogický jako v předchozím případě. Detailně jej proveďte sami

Tedy relace R je jistě předuspořádání. Relace není uspořádání, protože není antisymetrická. Například $(1, 2), (2, 1) \in R$, ale $1 \neq 2$.

h) Relace R je reflexivní, tranzitivní i antisymetrická, což plyne z toho, že $\leq_B$ je uspořádání. (Proveďte důkaz detailně!) Relace R obecně nemusí být úplné uspořádání a to ani tehdy, pokud $\leq_B$ je úplné. Stačí, aby $|A| > 1$ a $|B| > 0$.

i) Tento příklad je zcela analogický příkladu (c). Relace je uspořádání, které není úplné. Protipříklad úplnosti lze použít stejný jako v příkladě (c).

Příklad 3.

Nechť $R \subseteq M \times M$ je předuspořádání na M. Nechť $\sim$ je jádro R. Dokažte, že uspořádaná množina $(M/_\sim, \leq)$ indukovaná předuspořádáním R je dobře definovaná. Tj. dokažte, že $\sim \subseteq M \times M$ je skutečně ekvivalence a $\leq \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$ je skutečně uspořádání.

Řešení

Nechť $R \subseteq M \times M$ je předuspořádání na M. Jádrem předuspořádání R rozumíme relaci $\sim \subseteq M \times M$ takovou, že pro $x, y \in M$ platí $x \sim y$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$ a současně $(y, x) \in R$. Ukážeme, že $\sim$ je ekvivalence.

Relace $\sim$ je reflexivní, protože R je reflexivní. (Opravdu chápete, proč to platí?) Relace $\sim$ je symetrická přímo z definice. (Rozmyslete si to! Je snadné k tomuto závěru dojít na základě špatných úvah. Relace R není symetrická.) Abychom dokázali tranzitivitu, uvažme $a, b, c \in M$ takové, že $a \sim b$ a $b \sim c$. Z definice relace R plyne $(a, b), (b, a), (b, c), (c, b) \in R$. Protože R je tranzitivní, musí platit $(a, c), (c, a) \in R$, odkud $a \sim c$.

Protože $\sim$ je ekvivalence, má smysl hovořit o rozkladu $M/_\sim$. Předuspořádání R indukuje na $M/_\sim$ relaci $\leq \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$ definovanou pomocí reprezentantů. Pro libovolné $x, y \in M$ platí $[x] \leq [y]$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

Kdybychom chtěli být důslední, museli bychom na tomto místě ověřit, že definice pomocí reprezentantů je korektní. Museli bychom dokázat: je-li $(x_0, y_0) \in R$ pro nějaká $x_0, y_0 \in M$, potom pro všechna $x \in [x_0]$ a pro všechna $y \in [y_0]$ platí $(x, y) \in R$. Dokažte to! (Využijete především tranzitivitu R.)

Dokážeme, že $\leq$ je uspořádání. Relace $\leq$ je reflexivní, protože R je reflexivní. (Promyslete si to!) Relace $\leq$ je tranzitivní, protože R je tranzitivní. Pro antisymetrii uvažme $[x], [y] \in M/_\sim$ tak, že platí $[x] \leq [y]$ a $[y] \leq [x]$. Z definice relace $\leq$ potom platí $(x, y), (y, x) \in R$ a tedy $x \sim y$. Proto $[x] = [y]$, což jsme měli dokázat.

Příklad 4.

Nechť $R \subseteq M \times M$ je ekvivalence (je to tedy i předuspořádání).

a) Jak vypadá jádro R?

b) Jak vypadá uspořádání indukované relací R na příslušném rozkladu?

Řešení

a) Nechť $x, y \in M$ a značme $\sim$ jádro R. Potom z definice $x \sim y$ právě tehdy, když $(x,y),(y,x) \in R$. Protože R je ekvivalence, je symetrická, a tedy $(x,y),(y,x) \in R$ nastane právě tehdy, když $(x,y) \in R$. Proto $\sim \, = R$. (Zároveň jsme provedli oba směry důkazu rovnosti množin R a $\sim$.) Relace R je tedy svým vlastním jádrem.

b) Nechť $x, y \in M$. Předpokládejme, že $[x] \leq [y]$, kde $[x],[y] \in M/_\sim$. Potom z definice $\leq$ platí $(x,y) \in R$. Protože R je symetrická, platí i $(y,x) \in R$, odkud $[y] \leq [x]$. Protože $\leq$ je uspořádání, tedy relace antisymetrická, musí platit $[x] = [y]$. Ukázali jsme, že pokud jsou dvě třídy ekvivalence v relaci $\leq$, potom jsou stejné. A protože relace $\leq$ je reflexivní (je to uspořádání), můžeme shrnout, že $\leq \, = \mathrm{id}_{M/_\sim}$.

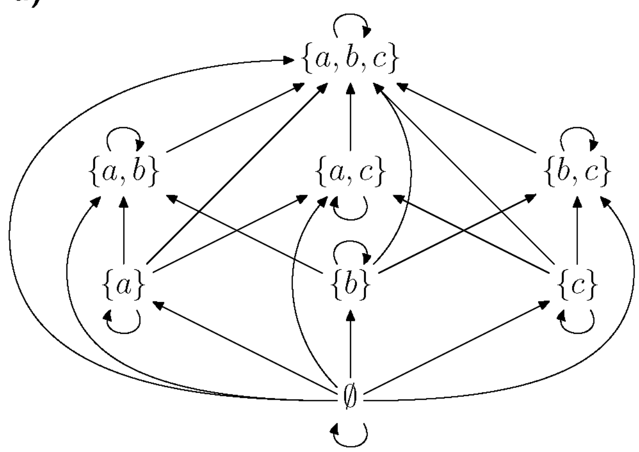
Příklad 5.

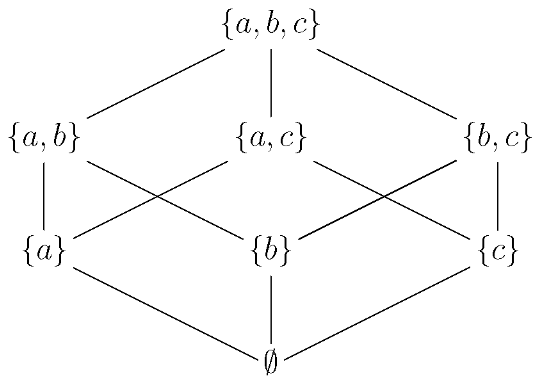
Nakreslete grafy relací a Hasseovské diagramy následujících uspořádaných množin.

a) $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
b) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
c) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \leq)$
d) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \mathrm{id})$

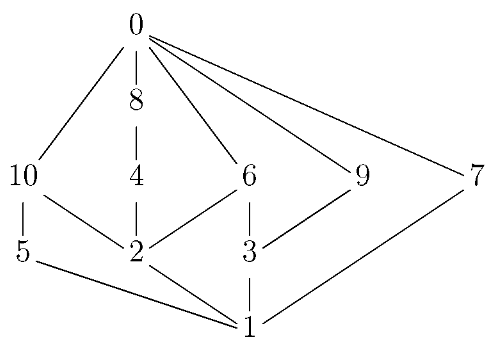
Řešení

a)

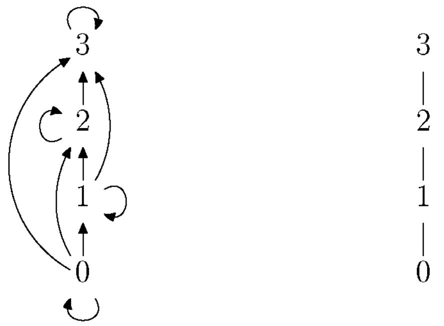




b) V tomto případě graf ponecháváme čtenáři kvůli prostorové náročnosti přehledného zobrazení.



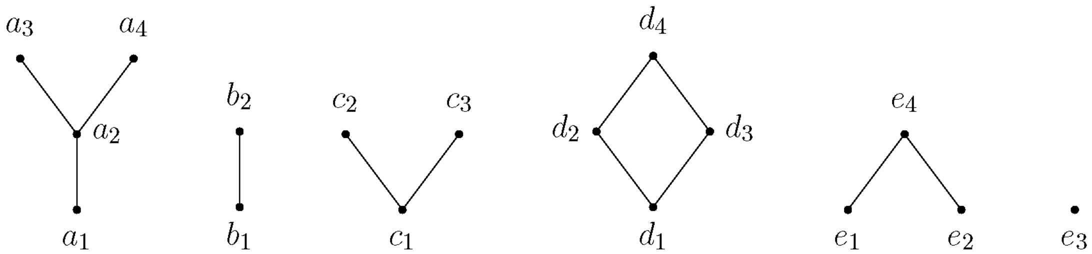
c)



d)

Příklad 6.

Pro uspořádané množiny zadané Hasseovskými diagramy



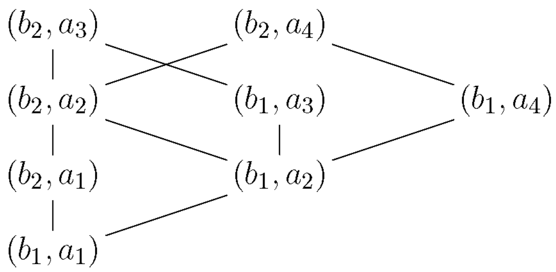
$(A, \leq_A)$ $(B, \leq_B)$ $(C, \leq_C)$ $(D, \leq_D)$ $(E, \leq_E)$

nakreslete Hasseovské diagramy (nejen) následujících uspořádaných množin.

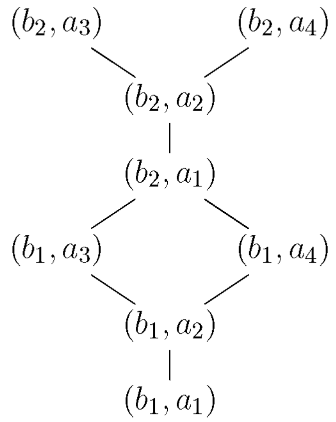
a) $(B \times A, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání po složkách
b) $(B \times A, \preceq)$, kde $\preceq$ je lexikografické uspořádání
c) $(D \times B, \leq)$, kde $\leq$ je lexikografické uspořádání
d) $(C \times E, \preceq)$, kde $\preceq$ je uspořádání po složkách

Řešení

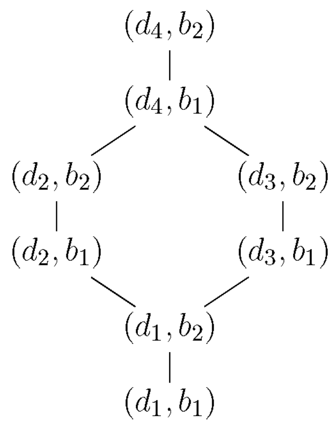
a)



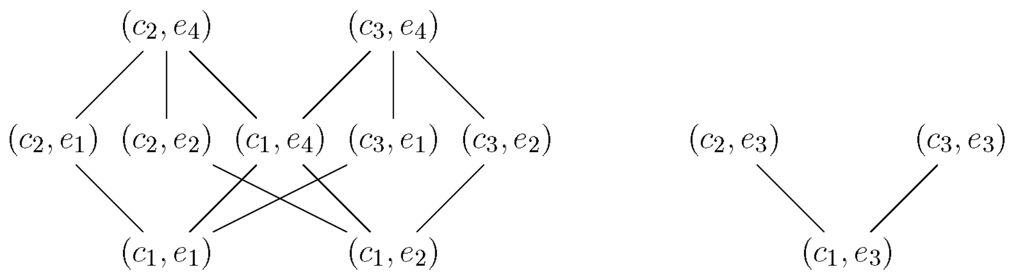
b)



c)



d)

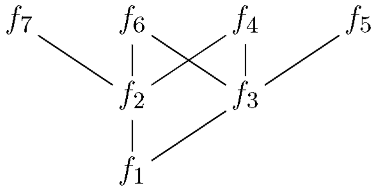


Příklad 7.

Nakreslete Hasseovský diagram množiny funkcí $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ s uspořádáním po bodech, kde pro $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ jsou funkce $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovány následovně

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= 1 \\
f_2(n) &= n + 1 \\
f_3(n) &= n^2 \\
f_4(n) &= n^2 + n + 1 \\
f_5(n) &= n^3 \\
f_6(n) &= n^2 + 6 \\
f_7(n) &= 2^n
\end{aligned}
$$

Řešení



Příklad 8.

Určete jádro předuspořádání R, příslušný rozklad a uspořádání indukované na tomto rozkladu v případě, že

a) $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$, kde A a B jsou libovolné množiny
b) $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
c) $R = \{(a, b) \mid \exists\, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : a = 5m + k \wedge b = 5n + l \wedge k < l\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
d) $R = \{(a, b) \mid$ pro každé prvočíslo p platí: $p \mid a \Rightarrow p \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Řešení

a) $\sim\, = \{(f, g) \mid f(A) = g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$
$M/_\sim = \{\{g \in B^A \mid f(A) = g(A)\} \mid f \in B^A\}$
$\leq\, = \{([f], [g]) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$
Protože jsme konstrukci provedli přesně podle definice a vět o vztahu rozkladu a příslušné ekvivalence, není potřeba nic dalšího dokazovat.

b) $\sim\, = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$M/_\sim = \{\{a \in \mathbb{Z} \mid a < 0\}, \{0\}, \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}\}$
$\leq\, = \{([a], [b]) \mid a \leq b\} \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$
Abyste nemuseli dokazovat korektnost těchto konstrukcí, stačí, když vyjdete z definic a známých tvrzení a z nich získané vztahy upravit do uvedené podoby. Zejména u definice $\leq$ není zcela zřejmé, proč nezávisí na reprezentantech. Kolik prvků má $\leq$? Zapište relaci $\leq$ i výčtem jejích prvků.

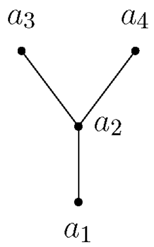
c) Relace R v tomto případě není předuspořádání. Proč? Změňte podmínku $k < l$ v definici relace tak, aby R bylo předuspořádání a vyhovovalo následujícím výsledkům.
$\sim\, = \{(a, b) \mid a \equiv b \bmod 5\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
$M/_\sim = \{\{a \in \mathbb{N}_0 \mid a \equiv i \bmod 5\} \mid i \in \mathbb{N}_0, i < 5\}$
$\leq\, = \{([5m + k], [5n + l]) \mid k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge k \leq l < 5\} \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$

d) $\sim\, = \{(a, b) \mid$ pro každé prvočíslo p platí: $p \mid a \iff p \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
Nechť A je konečná množina prvočísel. Položme
$N_A = \{a \in \mathbb{N} \mid$ rozklad a na prvočísla obsahuje právě prvočísla z množiny $A\}$
$M/_\sim = \{N_A \mid A$ je konečná množina prvočísel$\}$
$\leq\, = \{(N_A, N_B) \mid A \subseteq B\} \subseteq M/_\sim \times M/_\sim$

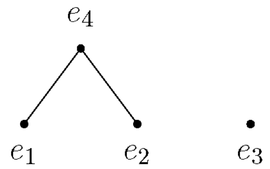
Příklad 9.

Určete všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny

a) $(2^M, \subseteq)$, kde M je libovolná množina
b) $(\mathbb{N}_0, |)$
c) $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
d) $(\mathbb{Z}, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$
e) $(A \times E, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání po složkách a uspořádané množiny $(A, \leq_A)$ a $(E, \leq_E)$ jsou zadané následujícími Hasseovskými diagramy.



$(A, \leq_A)$



$(E, \leq_E)$

Řešení

a) Protože pro každou množinu $X \subseteq M$ platí $\emptyset \subseteq X$ a $X \subseteq M$, je $\emptyset$ jediný nejmenší a M jediný největší prvek množiny $(2^M, \subseteq)$. Proto je $\emptyset$ také prvek minimální a M je prvek maximální.

b) Protože pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $1 \mid n$ a $n \mid 0$, je 1 nejmenší a 0 největší prvek množiny $(\mathbb{N}_0, \mid)$. Proto je 1 také prvek minimální a 0 prvek maximální. Jak by se výsledky změnily, kdybychom uvažovali přirozená čísla bez nuly?

c) Jedná se o konečnou verzi předchozího případu, výsledky jsou proto stejné. Jak by se změnily, pokud bychom vynechali nulu? (Dopadne to jinak než v předchozím případě!)

d) Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$. Potom a a b jsou nesrovnatelné. Proto každé $a \in \mathbb{Z}$ je minimální i maximální prvek a neexistuje žádný nejmenší ani největší prvek.

e) Minimální prvky množiny $A \times E$ v uspořádání po složkách jsou (a_1, e_1), (a_1, e_2) a (a_1, e_3). Maximální prvky jsou (a_3, e_4), (a_4, e_4), (a_3, e_3) a (a_4, e_3). Množina nemá žádný nejmenší ani největší prvek.

Příklad 10.

a) Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden nejmenší prvek.
b) Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden největší prvek.

Řešení

a) Sporem předpokládejme, že nějaká uspořádaná množina $(M, \leq)$ má dva nejmenší prvky, značme je a a b. Protože a je nejmenší, pro každé $x \in M$ platí $a \leq x$, zejména $a \leq b$. Protože b je nejmenší, analogicky dostáváme $b \leq a$. Protože $\leq$ je uspořádání, je to antisymetrická relace a musí platit $a = b$.

b) Důkaz je podobný jako v předchozím případě, ponecháváme jej proto čtenáři.

Příklad 11.

Pro danou uspořádanou množinu $(M, \leq)$ a její prvek x určete všechny prvky y, které prvek x pokrývá, a všechny prvky z, které pokrývají prvek x.

a) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $x = \{a, c, d\}$
b) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, \mid)$, $x = 924$
c) $(M, \leq) = (A \times B, \preceq)$, $x = (a_2, b_2)$, kde $\preceq$ je lexikografické uspořádání a $(A, \leq_A) = (\{a_1, a_2, a_3\}, \mathrm{id}_A \cup \{(a_1, a_2)\})$ a $(B, \leq_B) = (\{b_1, b_2, b_3\}, \mathrm{id}_B \cup \{(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_1, b_3)\})$

Řešení

a) Prvek x pokrývá prvky $\{a, c\}$, $\{c, d\}$ a $\{a, d\}$.
Prvek x pokrývají prvky $\{a, b, c, d\}$ a $\{a, c, d, e\}$.

b) Rozložme prvek x na prvočísla: $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Prvek x pokrývá prvky $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$, $2^2 \cdot 7 \cdot 11 = 308$, $2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$ a $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Prvek x pokrývají prvky $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot p$, kde p je libovolné prvočíslo.

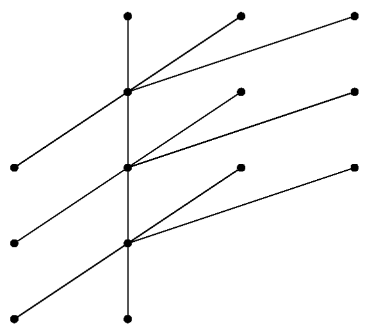
c) Prvkem x je pokryt prvek (a_2, b_1). Prvek x je pokryt prvkem (a_2, b_3).

Příklad 12.

Najděte takovou uspořádanou množinu, v níž každý prvek kromě minimálních a maximálních prvků bude pokrývat dva prvky a bude pokrýván třemi prvky, a uspořádaná množina bude obsahovat alespoň tři takové prvky.

Řešení

Řešením je například uspořádaná množina zadaná následujícím Hasseovským diagramem. Kromě tří prvků vyžadovaných v zadání jsou všechny ostatní prvky minimální nebo maximální.



Zkuste najít menší (s ohledem na počet prvků) řešení. Kolik prvků má nejmenší řešení?

Příklad 13.

Pro danou podmnožinu X uspořádané množiny $(M, \leq)$ určete její dolní závory, horní závory, infimum a supremum.

a) $(M, \leq) = (2^A, \subseteq)$, kde A je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je $X = \{Y \subseteq A \mid |Y| = n\}$

b) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $X = \{\{b, c\}, \{c, d\}\}$

c) $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$, $X = \{\{c\}, \{a, c, d\}\}$

d) $(M, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq n_0\}$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$

e) $(M, \leq) = (\mathbb{Z}, \leq)$, $X = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

f) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $X \subseteq \mathbb{N}$, $|X| = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$

g) $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$, $X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Řešení

a) Nejprve si uvědomme, že pokud A je konečná a platí $|A| < n$, potom $X = \emptyset$ a je to totéž, jako by bylo $n = 0$. Je-li A nekonečná, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n < |A|$. Proto se stačí omezit na taková n, která splňují $0 \leq n \leq |A|$.

Pokud $n = 0$, potom $X = \{\emptyset\}$ a $\emptyset$ je jedinou horní závorou i jedinou dolní závorou množiny X. Tedy je to i supremum i infimum množiny X.

Pokud A je konečná a $n = |A|$, potom $X = \{A\}$ a A je jedinou horní závorou i jedinou dolní závorou množiny X. Tedy je to i supremum i infimum množiny X.

Nechť $0 < n < |A|$ a $H \subseteq A$ je horní závora množiny X. Ukážeme, že $H = A$. K tomu stačí ukázat $A \subseteq H$, protože opačná inkluze plyne přímo z předpokladů. Nechť

$a \in A$. Potom jistě existuje $Y \subseteq A$ taková, že $|Y| = n$ a $a \in Y$. (Intuitivně je to zřejmé, ale uměli byste to dokázat?) Protože $|Y| = n$, platí $Y \in X$ a tudíž $a \in H$ (jinak by H nebylo větší než Y). Tedy A je horní závora množiny X. Protože je to jediná horní závora, je to zároveň i supremum.

Nechť $0 < n < |A|$ a nechť $D \subseteq A$ je dolní závora množiny X. Ukážeme, že $D = \emptyset$. Sporem tedy předpokládejme, že existuje $a \in D$. Jistě existuje $Y \subseteq A \setminus \{a\}$, $|Y| = n$, takže $Y \in X$. Protože $a \notin Y$, neplatí $D \subseteq Y$ a D tak nemůže být dolní závorou X. Proto $D = \emptyset$. Protože je to jediná dolní závora, je to i infimum.

Proč jsme řešili případy $n = 0$ a $n = |A|$ zvlášť? Kde jsme ve zbylé části využili $0 < n < |A|$?

b) Dolní závory množiny X jsou $\{c\}$ a $\emptyset$, infimum je $\{c\}$.

Horní závory množiny X jsou $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{b, c, d, e\}$ a $\{a, b, c, d, e\}$, supremum je $\{b, c, d\}$.

c) Dolní závory množiny X jsou $\{c\}$ a $\emptyset$, infimum je $\{c\}$.

Horní závory množiny X jsou $\{a, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, c, d, e\}$ a $\{a, b, c, d, e\}$, supremum je $\{a, c, d\}$.

d) Jedinou dolní závorou množiny X je číslo 1, je to tedy zároveň i infimum.

Horními závorami množiny X jsou všechna čísla $m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq m$. Supremem je n_0.

e) Žádná dolní závora množiny X neexistuje. Sporem předpokládejme, že $m \in \mathbb{Z}$ je dolní závora množiny X. Pro nějaká $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < 3$ platí $m = 3k + r$. Potom $m - r - 2 \in X$, ale $m - r - 2 < m$, takže m nemůže být dolní závora množiny X. Protože neexistuje žádná dolní závora X, neexistuje ani infimum X.

Zcela analogicky je možné dokázat, že neexistuje žádná horní závora množiny X, a proto neexistuje ani supremum X.

f) Dolní závorou množiny X je každý společný dělitel prvků X. Infimem je největší (ve standardním uspořádání přirozených čísel) společný dělitel prvků X.

Horní závorou množiny X je každý společný násobek prvků X, tj. každé takové přirozené číslo, které je dělitelné každým prvkem X. Supremum je nejmenší (ve standardním uspořádání přirozených čísel) společný násobek prvků X.

Důkazy ponecháváme čtenáři. Dávejte pozor, kdy operujete s kterým uspořádáním.

g) Dolními závorami množiny X jsou 1 a 2, infimem je číslo 2. Jedinou horní závorou a tedy suprémem je číslo 0. Důkaz, že jiná horní závora neexistuje, by používal stejnou techniku, jako byl použit v případě (e).