

# IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

## Sada 6 — Řešení

### Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

### Téma

Vlastnosti relací. Ekvivalence, rozklad množiny, třídy ekvivalence. Uspořádání, předuspořádání. Minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádaných množin. Horní a dolní závora, supremum a infimum. Relace pokrytí na uspořádané množině. Hasseovské diagramy.

### Příklad 1.

- a) Dokažte, že každé uspořádání je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.
- b) Dokažte, že každá ekvivalence je předuspořádání, ale obrácené tvrzení neplatí.

### Řešení

a) Nechť  $M$  je libovolná množina a nechť  $R \subseteq M \times M$  je libovolné uspořádání na  $M$ . Potom  $R$  je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace. Protože je relace  $R$  reflexivní a tranzitivní, je to předuspořádání.

Abychom dokázali, že obrácené tvrzení neplatí, nalezneme předuspořádání, které není uspořádáním. Nechť  $M = \{a, b\}$  a  $R = M \times M$ . Důkaz, že  $R$  je hledaná relace, tedy že  $R$  je reflexivní a tranzitivní, ale není antisymetrická, ponecháváme čtenáři.

b) Nechť  $M$  je libovolná množina a nechť  $R \subseteq M \times M$  je libovolná ekvivalence na  $M$ . Potom  $R$  je zejména reflexivní a tranzitivní, je to tedy předuspořádání.

Abychom ukázali, že obecné tvrzení neplatí, nalezneme předuspořádání, které není ekvivalencí. Nechť  $M = \{a, b, c\}$  a  $R = \text{id}_M \cup \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$ .

### Příklad 2.

Rozhodněte, které z následujících relací jsou předuspořádání, uspořádání, resp. úplná uspořádání. Svá tvrzení dokažte. Pokud je to nutné, tak v definicích předpokládáme, že  $(A, \leq_A)$  a  $(B, \leq_B)$  jsou uspořádné množiny.

- a)  $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \subseteq M \times M$ , kde  $M = \{a, b, c\}$
- b)  $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c)\} \subseteq M \times M$ , kde  $M = \{a, b, c\}$
- c)  $R = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\} \subseteq 2^A \times 2^A$
- d)  $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$
- e)  $R = \{((a, b), (c, d)) \mid a \leq_A c \text{ a } d \leq_A b\} \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$
- f)  $R = \{(a, b) \mid \exists c \in M : a = b + c\} \subseteq M \times M$ , kde  $M = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq n\}$  pro  $n \in \mathbb{N}$
- g)  $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- h)  $R = \{((a, b), (a, c)) \mid b \leq_B c\} \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$
- i)  $R = \{(X, Y) \mid \overline{X} \subseteq \overline{Y}\} \subseteq 2^A \times 2^A$

## Řešení

**a)** Relace  $R$  je sice tranzitivní a antisymetrická, není však reflexivní. Například  $(a, a) \notin R$ . Proto se nejedná ani o předuspořádání, ani o uspořádání.

**b)** Relace  $R$  je reflexivní, tranzitivní i antisymetrická. Jedná se proto o uspořádání. Toto uspořádání není úplné, protože  $(a, b) \notin R$  a  $(b, a) \notin R$  (prvky  $a$  a  $b$  jsou nesrovnatelné).

**c)** Relace  $R$  je reflexivní, protože  $X \subseteq X$  platí pro každou množinu  $X$ . Relace je tranzitivní, protože pro libovolné tři množiny  $X, Y, Z$ , pro které platí  $X \subseteq Y$  a  $Y \subseteq Z$ , platí také  $X \subseteq Z$ . (Detailně to dokažte!) Relace je antisymetrická. Nechť  $X, Y$  jsou dvě libovolné množiny. Nechť platí  $X \subseteq Y$  a  $Y \subseteq X$ . Potom  $X = Y$ .

Uspořádání to není úplné. Nechť  $A = \{a, b\}$ . Potom množiny  $\{a\} \in 2^A$  a  $\{b\} \in 2^A$  jsou nesrovnatelné.

**d)** Připomeňme, že definici funkce  $f : A \rightarrow B$  rozšiřujeme na množiny  $M$ ,  $M \subseteq A$  předpisem  $f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}$ .

Relace  $R$  je reflexivní, protože  $f(A) = f(A)$ . Tranzitivita  $R$  plyne z tranzitivity inkluze množin. (Dokažte tranzitivitu i detailně!) Relace  $R$  je tedy jistě předuspořádání. Relace  $R$  není uspořádání, protože není antisymetrická. Uvažme totiž  $A = B = \{a, b\}$  a funkce  $f = \{(a, a), (b, b)\}$  a  $g = \{(a, b), (b, a)\}$ . Potom  $f(A) = g(A)$ , tedy  $(f, g) \in R$ , a zároveň  $g(A) = f(A)$ , tedy  $(g, f) \in R$ . Přitom  $f \neq g$ .

**e)** Uvědomte si, že  $\leq_A$  a  $\leq_B$  jsou uspořádání. Můžeme tedy využít toho, že jako relace mají příslušné vlastnosti.

Relace  $R$  je reflexivní. Nechť  $a, b \in A$  jsou libovolné. Potom  $((a, b), (a, b)) \in R$ , protože  $a \leq_A a$  a  $b \leq_A b$ .

Relace  $R$  je tranzitivní. Nechť  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in A \times A$  jsou libovolné. Nechť platí  $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$  a  $((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in R$ . Potom  $a_1 \leq_A a_2 \leq_A a_3$ , tedy  $a_1 \leq_A a_3$ . Zároveň  $b_3 \leq_A b_2 \leq_A b_1$ , tedy  $b_3 \leq_A b_1$ . Celkem  $((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in R$ .

Relace  $R$  je antisymetrická. Nechť  $(a, b), (c, d) \in A \times A$  jsou libovolné a platí  $((a, b), (c, d)), ((c, d), (a, b)) \in R$ . Potom  $a \leq_A c$  a zároveň  $c \leq_A a$ , tedy  $a = c$ . Současně  $d \leq_A b$  a zároveň  $b \leq_A d$ , tedy  $b = d$ . Celkem dostáváme  $(a, b) = (c, d)$ .

Relace  $R$  není úplné uspořádání. V podstatě se totiž jedná o uspořádání po složkách součinu uspořádaných množin  $(A, \leq_A)$  a  $(A, \geq_A)$ , kde  $\geq_A = \leq_A^{-1}$ . Lze tedy použít analogický protipříklad. (Napište jej!) Právě jsme použili tvrzení: pokud  $R \subseteq M \times M$  je uspořádání, potom  $R^{-1}$  je také uspořádání. Dokažte toto tvrzení! Rozmyslete si, zda analogické tvrzení platí pro předuspořádání, resp. úplné uspořádání.

**f)** Relace  $R$  je reflexivní, protože  $0 \in M$  a  $a + 0 = a$  pro každé  $a \in \mathbb{N}_0$ . Relace  $R$  je tranzitivní. Nechť  $a, b, c \in M$ ,  $(a, b), (b, c) \in R$ . Potom existují  $d_1, d_2 \in M$  tak, že  $a = b + d_1$  a  $b = c + d_2$ . Celkem dostáváme  $a = c + d_1 + d_2$ . Zbývá ukázat, že  $d_1 + d_2 \in M$ . To ovšem platí, protože  $a, c, d_1$  i  $d_2$  jsou nezáporná, takže musí platit  $0 \leq d_1 + d_2 \leq a \leq n$ . Symbol  $\leq$  zde reprezentuje standardní uspořádání přirozených čísel. Relace  $R$  je antisymetrická. Nechť pro  $a, b \in M$  platí  $(a, b) \in R$ ,  $(b, a) \in R$ . Potom existují  $c_1, c_2 \in M$  taková, že  $a = b + c_1$  a  $b = a + c_2$ . Odtud dostáváme  $a = a + c_1 + c_2$ . Protože  $c_1$  i  $c_2$  je nezáporné, musí platit  $0 = c_1 = c_2$ , odkud  $a = b$ .

Uspořádání je úplné. Nechť  $a, b \in M$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $a \leq b$ . Potom existuje  $c \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq c \leq b \leq n$  takové, že  $b = a + c$ . Vzhledem k podmínkám kladeným na  $c$  musí platit  $c \in M$  a tedy  $(b, a) \in R$ .

**g)** Relace  $R$  je reflexivní. Nechť  $a \in \mathbb{Z}$ . Je-li  $a < 0$  nebo  $a > 0$ , potom  $a \cdot a > 0$ , tedy  $(a, a) \in R$ . Je-li  $a = 0$ , potom  $(0, 0) \in R$  přímo z definice.

Relace je tranzitivní. Nechť  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, b), (b, c) \in R$ . Rozlišíme tři případy podle hodnoty  $b$ . Pokud  $b = 0$ , potom  $a \leq 0 \leq c$ , odkud  $(a, c) \in R$ . (Tyto kroky nejsou tak zřejmé. Dobře si je promyslete!) Pokud  $b < 0$ , potom  $a < 0$ . Rozlišíme dva podpřípady podle  $c$ . Pokud  $c < 0$ , potom  $a \cdot c > 0$  a  $(a, c) \in R$ . Pokud  $0 \leq c$ , potom  $a < c$  a také  $(a, c) \in R$ . Pokud  $0 < b$ , je důkaz analogický jako v předchozím případě. Detailně jej proveďte sami

Tedy relace  $R$  je jistě předuspořádání. Relace není uspořádání, protože není antisymetrická. Například  $(1, 2), (2, 1) \in R$ , ale  $1 \neq 2$ .

**h)** Relace  $R$  je reflexivní, tranzitivní i antisymetrická, což plyne z toho, že  $\leq_B$  je uspořádání. (Proveďte důkaz detailně!) Relace  $R$  obecně nemusí být úplné uspořádání a to ani tehdy, pokud  $\leq_B$  je úplné. Stačí, aby  $|A| > 1$  a  $|B| > 0$ .

**i)** Tento příklad je zcela analogický příkladu (c). Relace je uspořádání, které není úplné. Protipříklad úplnosti lze použít stejný jako v příkladě (c).

### Příklad 3.

Nechť  $R \subseteq M \times M$  je předuspořádání na  $M$ . Nechť  $\sim$  je jádro  $R$ . Dokažte, že uspořádaná množina  $(M/\sim, \leq)$  indukovaná předuspořádáním  $R$  je dobře definovaná. Tj. dokažte, že  $\sim \subseteq M \times M$  je skutečně ekvivalence a  $\leq \subseteq M/\sim \times M/\sim$  je skutečně uspořádání.

#### Řešení

Nechť  $R \subseteq M \times M$  je předuspořádání na  $M$ . Jádrem předuspořádání  $R$  rozumíme relaci  $\sim \subseteq M \times M$  takovou, že pro  $x, y \in M$  platí  $x \sim y$  právě tehdy, když  $(x, y) \in R$  a současně  $(y, x) \in R$ . Ukážeme, že  $\sim$  je ekvivalence.

Relace  $\sim$  je reflexivní, protože  $R$  je reflexivní. (Opravdu chápete, proč to platí?) Relace  $\sim$  je symetrická přímo z definice. (Rozmyslete si to! Je snadné k tomuto závěru dojít na základě špatných úvah. Relace  $R$  není symetrická.) Abychom dokázali tranzitivitu, uvažme  $a, b, c \in M$  takové, že  $a \sim b$  a  $b \sim c$ . Z definice relace  $R$  plyne  $(a, b), (b, a), (b, c), (c, b) \in R$ . Protože  $R$  je tranzitivní, musí platit  $(a, c), (c, a) \in R$ , odkud  $a \sim c$ .

Protože  $\sim$  je ekvivalence, má smysl hovořit o rozkladu  $M/\sim$ . Předuspořádání  $R$  indukuje na  $M/\sim$  relaci  $\leq \subseteq M/\sim \times M/\sim$  definovanou pomocí reprezentantů. Pro libovolné  $x, y \in M$  platí  $[x] \leq [y]$  právě tehdy, když  $(x, y) \in R$ .

Kdybychom chtěli být důslední, museli bychom na tomto místě ověřit, že definice pomocí reprezentantů je korektní. Museli bychom dokázat: je-li  $(x_0, y_0) \in R$  pro nějaká  $x_0, y_0 \in M$ , potom pro všechna  $x \in [x_0]$  a pro všechna  $y \in [y_0]$  platí  $(x, y) \in R$ . Dokažte to! (Využijete především tranzitivitu  $R$ .)

Dokážeme, že  $\leq$  je uspořádání. Relace  $\leq$  je reflexivní, protože  $R$  je reflexivní. (Promyslete si to!) Relace  $\leq$  je tranzitivní, protože  $R$  je tranzitivní. Pro antisymetrii uvažme  $[x], [y] \in M/\sim$  tak, že platí  $[x] \leq [y]$  a  $[y] \leq [x]$ . Z definice relace  $\leq$  potom platí  $(x, y), (y, x) \in R$  a tedy  $x \sim y$ . Proto  $[x] = [y]$ , což jsme měli dokázat.

### Příklad 4.

Nechť  $R \subseteq M \times M$  je ekvivalence (je to tedy i předuspořádání).

**a)** Jak vypadá jádro  $R$ ?

**b)** Jak vypadá uspořádání indukované relací  $R$  na příslušném rozkladu?

### Řešení

**a)** Nechť  $x, y \in M$  a značme  $\sim$  jádro  $R$ . Potom z definice  $x \sim y$  právě tehdy, když  $(x, y), (y, x) \in R$ . Protože  $R$  je ekvivalence, je symetrická, a tedy  $(x, y), (y, x) \in R$  nastane právě tehdy, když  $(x, y) \in R$ . Proto  $\sim = R$ . (Zároveň jsme provedli oba směry důkazu rovnosti množin  $R$  a  $\sim$ .) Relace  $R$  je tedy svým vlastním jádrem.

**b)** Nechť  $x, y \in M$ . Předpokládejme, že  $[x] \leq [y]$ , kde  $[x], [y] \in M/\sim$ . Potom z definice  $\leq$  platí  $(x, y) \in R$ . Protože  $R$  je symetrická, platí i  $(y, x) \in R$ , odkud  $[y] \leq [x]$ . Protože  $\leq$  je uspořádání, tedy relace antisymetrická, musí platit  $[x] = [y]$ . Ukázali jsme, že pokud jsou dvě třídy ekvivalence v relaci  $\leq$ , potom jsou stejné. A protože relace  $\leq$  je reflexivní (je to uspořádání), můžeme shrnout, že  $\leq = \text{id}_{M/\sim}$ .

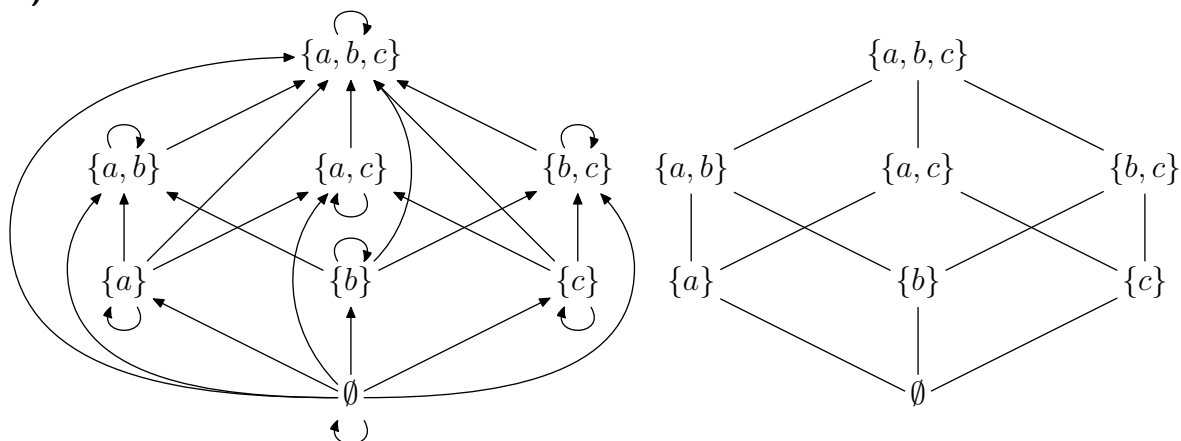
### Příklad 5.

Nakreslete grafy relací a Hasseovské diagramy následujících uspořádaných množin.

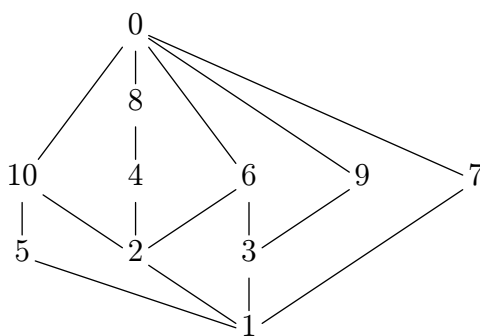
- a)  $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$
- b)  $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
- c)  $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \leq)$
- d)  $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 3\}, \text{id})$

### Řešení

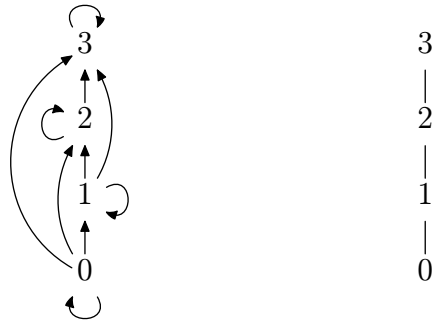
a)



**b)** V tomto případě graf ponecháváme čtenáři kvůli prostorové náročnosti přehledného zobrazení.



c)

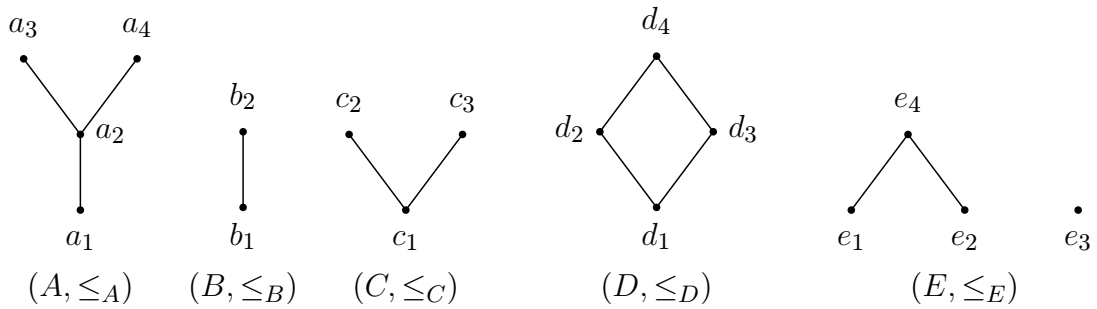


d)



**Příklad 6.**

Pro uspořádané množiny zadané Hasseovskými diagramy

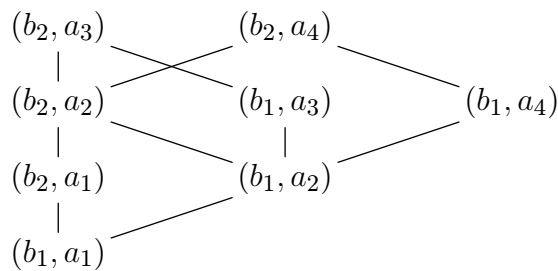


nakreslete Hasseovské diagramy (nejen) následujících uspořádaných množin.

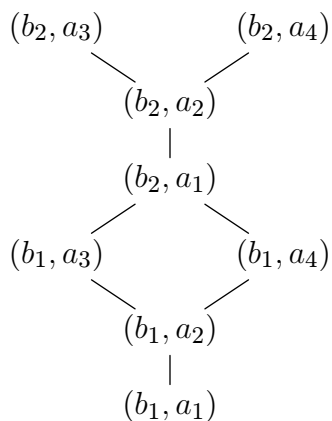
- a)  $(B \times A, \leq)$ , kde  $\leq$  je uspořádání po složkách
- b)  $(B \times A, \preceq)$ , kde  $\preceq$  je lexikografické uspořádání
- c)  $(D \times B, \leq)$ , kde  $\leq$  je lexikografické uspořádání
- d)  $(C \times E, \preceq)$ , kde  $\preceq$  je uspořádání po složkách

**Řešení**

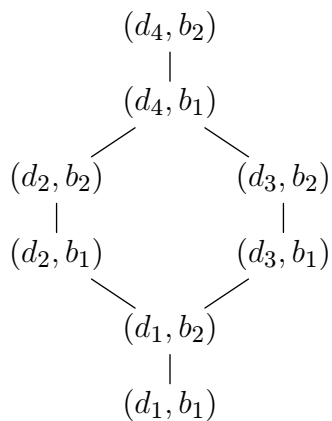
a)



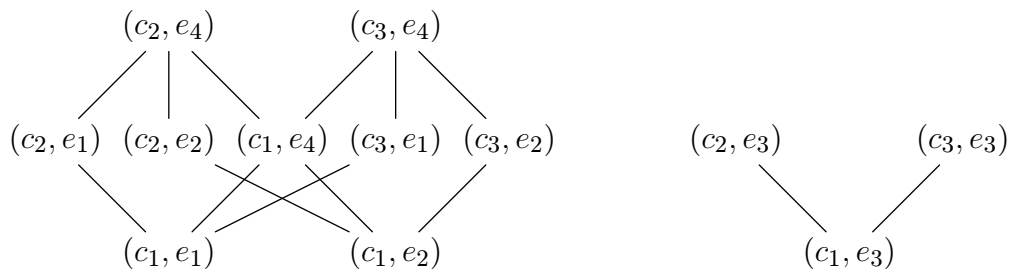
b)



c)



d)



### Příklad 7.

Nakreslete Hasseovský diagram množiny funkcí  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$  s uspořádáním po bodech, kde pro  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  jsou funkce  $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definovány následovně

$$f_1(n) = 1$$

$$f_2(n) = n + 1$$

$$f_3(n) = n^2$$

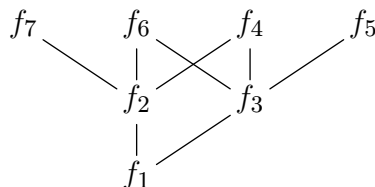
$$f_4(n) = n^2 + n + 1$$

$$f_5(n) = n^3$$

$$f_6(n) = n^2 + 6$$

$$f_7(n) = 2^n$$

## Řešení



### Příklad 8.

Určete jádro předuspořádání  $R$ , příslušný rozklad a uspořádání indukované na tomto rozkladu v případě, že

- $R = \{(f, g) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$ , kde  $A$  a  $B$  jsou libovolné množiny
- $R = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0 \vee a < b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $R = \{(a, b) \mid \exists k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : a = 5m + k \wedge b = 5n + l \wedge k < l\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $R = \{(a, b) \mid \text{pro každé prvočíslo } p \text{ platí: } p \mid a \Rightarrow p \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

## Řešení

- $\sim = \{(f, g) \mid f(A) = g(A)\} \subseteq B^A \times B^A$   
 $M/\sim = \{[g] \mid f(A) = g(A)\} \mid f \in B^A$   
 $\leq = \{([f], [g]) \mid f(A) \subseteq g(A)\} \subseteq M/\sim \times M/\sim$

Protože jsme konstrukci provedli přesně podle definice a vět o vztahu rozkladu a příslušné ekvivalence, není potřeba nic dalšího dokazovat.

- $\sim = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a \cdot b > 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
 $M/\sim = \{[a] \mid a < 0\}, \{0\}, \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$   
 $\leq = \{([a], [b]) \mid a \leq b\} \subseteq M/\sim \times M/\sim$

Abyste nemuseli dokazovat korektnost těchto konstrukcí, stačí, když vyjdete z definic a známých tvrzení a z nich získané vztahy upravit do uvedené podoby. Zejména u definice  $\leq$  není zcela zřejmé, proč nezávisí na reprezentantech. Kolik prvků má  $\leq$ ? Zapište relaci  $\leq$  i výčtem jejích prvků.

**c)** Relace  $R$  v tomto případě není předuspořádání. Proč? Změňte podmínku  $k < l$  v definici relace tak, aby  $R$  bylo předuspořádání a vyhovovalo následujícím výsledkům.

- $\sim = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{5}\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$   
 $M/\sim = \{[a] \mid a \equiv i \pmod{5}\} \mid i \in \mathbb{N}_0, i < 5$   
 $\leq = \{([5m+k], [5n+l]) \mid k, l, m, n \in \mathbb{N}_0 \wedge k \leq l < 5\} \subseteq M/\sim \times M/\sim$

- $\sim = \{(a, b) \mid \text{pro každé prvočíslo } p \text{ platí: } p \mid a \iff p \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Nechť  $A$  je konečná množina prvočísel. Položme

$$N_A = \{a \in \mathbb{N} \mid \text{rozklad } a \text{ na prvočísla obsahuje právě prvočísla z množiny } A\}$$

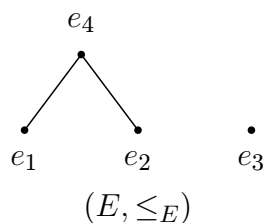
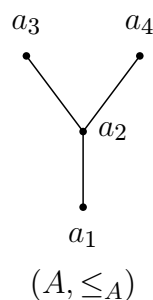
$$M/\sim = \{N_A \mid A \text{ je konečná množina prvočísel}\}$$

$$\leq = \{(N_A, N_B) \mid A \subseteq B\} \subseteq M/\sim \times M/\sim$$

### Příklad 9.

Určete všechny minimální, maximální, nejmenší a největší prvky uspořádané množiny

- $(2^M, \subseteq)$ , kde  $M$  je libovolná množina
- $(\mathbb{N}_0, |)$
- $(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq 10\}, |)$
- $(\mathbb{Z}, \text{id}_{\mathbb{Z}})$
- $(A \times E, \leq)$ , kde  $\leq$  je uspořádání po složkách a uspořádané množiny  $(A, \leq_A)$  a  $(E, \leq_E)$  jsou zadané následujícími Hasseovskými diagramy.



### Řešení

**a)** Protože pro každou množinu  $X \subseteq M$  platí  $\emptyset \subseteq X$  a  $X \subseteq M$ , je  $\emptyset$  jediný nejmenší a  $M$  jediný největší prvek množiny  $(2^M, \subseteq)$ . Proto je  $\emptyset$  také prvek minimální a  $M$  je prvek maximální.

**b)** Protože pro každé  $n \in \mathbb{N}_0$  platí  $1 \mid n$  a  $n \mid 0$ , je 1 nejmenší a 0 největší prvek množiny  $(\mathbb{N}_0, \mid)$ . Proto je 1 také prvek minimální a 0 prvek maximální. Jak by se výsledky změnil, kdybychom uvažovali přirozená čísla bez nuly?

**c)** Jedná se o konečnou verzi předchozího případu, výsledky jsou proto stejné. Jak by se změnil, pokud bychom vynechali nulu? (Dopadne to jinak než v předchozím případě!)

**d)** Nechť  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq b$ . Potom  $a$  a  $b$  jsou nesrovnatelné. Proto každé  $a \in \mathbb{Z}$  je minimální i maximální prvek a neexistuje žádný nejmenší ani největší prvek.

**e)** Minimální prvky množiny  $A \times E$  v uspořádání po složkách jsou  $(a_1, e_1)$ ,  $(a_1, e_2)$  a  $(a_1, e_3)$ . Maximální prvky jsou  $(a_3, e_4)$ ,  $(a_4, e_4)$ ,  $(a_3, e_3)$  a  $(a_4, e_3)$ . Množina nemá žádný nejmenší ani největší prvek.

### Příklad 10.

**a)** Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden nejmenší prvek.

**b)** Dokažte, že každá uspořádaná množina má nejvýše jeden největší prvek.

### Řešení

**a)** Sporem předpokládejme, že nějaká uspořádaná množina  $(M, \leq)$  má dva nejmenší prvky, značme je  $a$  a  $b$ . Protože  $a$  je nejmenší, pro každé  $x \in M$  platí  $a \leq x$ , zejména  $a \leq b$ . Protože  $b$  je nejmenší, analogicky dostáváme  $b \leq a$ . Protože  $\leq$  je uspořádání, je to antisymetrická relace a musí platit  $a = b$ .

**b)** Důkaz je podobný jako v předchozím případě, ponecháváme jej proto čtenáři.

### Příklad 11.

Pro danou uspořádanou množinu  $(M, \leq)$  a její prvek  $x$  určete všechny prvky  $y$ , které prvek  $x$  pokrývá, a všechny prvky  $z$ , které pokrývají prvek  $x$ .

**a)**  $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$ ,  $x = \{a, c, d\}$

**b)**  $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, \mid)$ ,  $x = 924$

**c)**  $(M, \leq) = (A \times B, \preceq)$ ,  $x = (a_2, b_2)$ , kde  $\preceq$  je lexikografické uspořádání a  $(A, \leq_A) = (\{a_1, a_2, a_3\}, \text{id}_A \cup \{(a_1, a_2)\})$  a  $(B, \leq_B) = (\{b_1, b_2, b_3\}, \text{id}_B \cup \{(b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_1, b_3)\})$

### Řešení

**a)** Prvek  $x$  pokrývá prvky  $\{a, c\}$ ,  $\{c, d\}$  a  $\{a, d\}$ .

Prvek  $x$  pokrývají prvky  $\{a, b, c, d\}$  a  $\{a, c, d, e\}$ .



**b)** Rozložme prvek  $x$  na prvočísla:  $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ .

Prvek  $x$  pokrývá prvky  $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 462$ ,  $2^2 \cdot 7 \cdot 11 = 308$ ,  $2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$  a  $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ .

Prvek  $x$  pokrývají prvky  $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot p$ , kde  $p$  je libovolné prvočíсло.

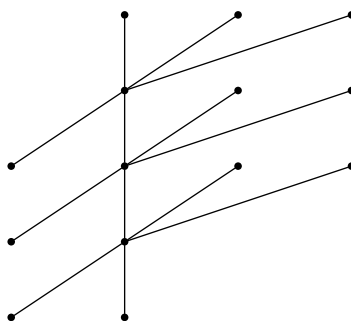
**c)** Prvkem  $x$  je pokryt prvek  $(a_2, b_1)$ . Prvek  $x$  je pokryt prvkem  $(a_2, b_3)$ .

### Příklad 12.

Najděte takovou uspořádanou množinu, v níž každý prvek kromě minimálních a maximálních prvků bude pokrývat dva prvky a bude pokrýván třemi prvky, a uspořádaná množina bude obsahovat alespoň tři takové prvky.

### Řešení

Řešením je například uspořádaná množina zadaná následujícím Hasseovským diagramem. Kromě tří prvků vyžadovaných v zadání jsou všechny ostatní prvky minimální nebo maximální.



Zkuste najít menší (s ohledem na počet prvků) řešení. Kolik prvků má nejmenší řešení?

### Příklad 13.

Pro danou podmnožinu  $X$  uspořádané množiny  $(M, \leq)$  určete její dolní závory, horní závory, infimum a supremum.

**a)**  $(M, \leq) = (2^A, \subseteq)$ , kde  $A$  je množina a pro  $n \in \mathbb{N}$  je  $X = \{Y \subseteq A \mid |Y| = n\}$

**b)**  $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$ ,  $X = \{\{b, c\}, \{c, d\}\}$

**c)**  $(M, \leq) = (2^{\{a,b,c,d,e\}}, \subseteq)$ ,  $X = \{\{c\}, \{a, c, d\}\}$

**d)**  $(M, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$ ,  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq n_0\}$  pro nějaké  $n_0 \in \mathbb{N}$

**e)**  $(M, \leq) = (\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $X = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**f)**  $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$ ,  $X \subseteq \mathbb{N}$ ,  $|X| = n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$

**g)**  $(M, \leq) = (\mathbb{N}_0, |)$ ,  $X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

### Řešení

**a)** Nejprve si uvědomme, že pokud  $A$  je konečná a platí  $|A| < n$ , potom  $X = \emptyset$  a je to totéž, jako by bylo  $n = 0$ . Je-li  $A$  nekonečná, potom pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $n < |A|$ . Proto se stačí omezit na taková  $n$ , která splňují  $0 \leq n \leq |A|$ .

Pokud  $n = 0$ , potom  $X = \{\emptyset\}$  a  $\emptyset$  je jedinou horní závorou i jedinou dolní závorou množiny  $X$ . Tedy je to i supremum i infimum množiny  $X$ .

Pokud  $A$  je konečná a  $n = |A|$ , potom  $X = \{A\}$  a  $A$  je jedinou horní závorou i jedinou dolní závorou množiny  $X$ . Tedy je to i supremum i infimum množiny  $X$ .

Nechť  $0 < n < |A|$  a  $H \subseteq A$  je horní závora množiny  $X$ . Ukážeme, že  $H = A$ . K tomu stačí ukázat  $A \subseteq H$ , protože opačná inkluze plyne přímo z předpokladů. Nechť

$a \in A$ . Potom jistě existuje  $Y \subseteq A$  taková, že  $|Y| = n$  a  $a \in Y$ . (Intuitivně je to zřejmé, ale uměli byste to dokázat?) Protože  $|Y| = n$ , platí  $Y \in X$  a tudíž  $a \in H$  (jinak by  $H$  nebylo větší než  $Y$ ). Tedy  $A$  je horní závora množiny  $X$ . Protože je to jediná horní závora, je to zároveň i supremum.

Nechť  $0 < n < |A|$  a necht'  $D \subseteq A$  je dolní závora množiny  $X$ . Ukážeme, že  $D = \emptyset$ . Sporem tedy předpokládejme, že existuje  $a \in D$ . Jistě existuje  $Y \subseteq A \setminus \{a\}$ ,  $|Y| = n$ , takže  $Y \in X$ . Protože  $a \notin Y$ , neplatí  $D \subseteq Y$  a  $D$  tak nemůže být dolní závora  $X$ . Proto  $D = \emptyset$ . Protože je to jediná dolní závora, je to i infimum.

Proč jsme řešili případy  $n = 0$  a  $n = |A|$  zvlášť? Kde jsme ve zbylé části využili  $0 < n < |A|$ ?

**b)** Dolní závory množiny  $X$  jsou  $\{c\}$  a  $\emptyset$ , infimum je  $\{c\}$ .

Horní závory množiny  $X$  jsou  $\{b, c, d\}$ ,  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{b, c, d, e\}$  a  $\{a, b, c, d, e\}$ , supremum je  $\{b, c, d\}$ .

**c)** Dolní závory množiny  $X$  jsou  $\{c\}$  a  $\emptyset$ , infimum je  $\{c\}$ .

Horní závory množiny  $X$  jsou  $\{a, c, d\}$ ,  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{a, c, d, e\}$  a  $\{a, b, c, d, e\}$ , supremum je  $\{a, c, d\}$ .

**d)** Jedinou dolní závora množiny  $X$  je číslo 1, je to tedy zároveň i infimum.

Horními závora množiny  $X$  jsou všechna čísla  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \leq m$ . Supremum je  $n_0$ .

**e)** Žádná dolní závora množiny  $X$  neexistuje. Sporem předpokládejme, že  $m \in \mathbb{Z}$  je dolní závora množiny  $X$ . Pro nějaká  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq r < 3$  platí  $m = 3k + r$ . Potom  $m - r - 2 \in X$ , ale  $m - r - 2 < m$ , takže  $m$  nemůže být dolní závora množiny  $X$ . Protože neexistuje žádná dolní závora  $X$ , neexistuje ani infimum  $X$ .

Zcela analogicky je možné dokázat, že neexistuje žádná horní závora množiny  $X$ , a proto neexistuje ani supremum  $X$ .

**f)** Dolní závora množiny  $X$  je každý společný dělitel prvků  $X$ . Infimum je největší (ve standardním uspořádání přirozených čísel) společný dělitel prvků  $X$ .

Horní závora množiny  $X$  je každý společný násobek prvků  $X$ , tj. každé takové přirozené číslo, které je dělitelné každým prvkem  $X$ . Supremum je nejmenší (ve standardním uspořádání přirozených čísel) společný násobek prvků  $X$ .

Důkazy ponecháváme čtenáři. Dávejte pozor, kdy operujete s kterým uspořádáním.

**g)** Dolními závora množiny  $X$  jsou 1 a 2, infimum je číslo 2. Jedinou horní závora množiny  $X$  je číslo 0. Důkaz, že jiná horní závora neexistuje, by používal stejnou techniku, jako byl použit v případě (e).