Zadání:
Dokažte $|a| + |b| \geq |a + b|$.
Kde $|x|$ označuje absolutní hodnotu čísla x, čili $|x| = x$ pro $x \geq 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

Řešení 1 (velmi ukecané):
Tvrzení dokážeme tak, že probereme všechny níže uvedené možnosti:

1. Nechť $a \geq 0$ a $b \geq 0$.
   Z $a \geq 0$ dle definice abs. hodnoty dostáváme, že $|a| = a$.
   Z $b \geq 0$ dle definice abs. hodnoty dostáváme, že $|b| = b$.
   Z $a \geq 0$ a $b \geq 0$ plyne, že $a + b \geq 0$. Proto $|a + b| = a + b$.
   Dohromady dostáváme $|a| + |b| = a + b = |a + b|$.

2. Nechť $a < 0$ a $b < 0$.
   Z $a < 0$ dle definice abs. hodnoty dostáváme, že $|a| = -a$.
   Z $b < 0$ dle definice abs. hodnoty dostáváme, že $|b| = -b$.
   Z $a < 0$ a $b < 0$ plyne, že $a + b < 0$. Proto $|a + b| = -(a + b)$.
   Dohromady dostáváme $|a| + |b| = -a + (-b) = -(a + b) = |a + b|$.

3. Nechť $a \geq 0$ a $b < 0$.
   Z $a \geq 0$ dle definice abs. hodnoty dostáváme, že $|a| = a$.
   Z $b < 0$ dle definice abs. hodnoty dostáváme, že $|b| = -b$.
   Nyní $|a| + |b| = a + (-b) = a - b$. Chceme tedy ukázat, že $a - b \geq |a + b|$.
   Zde je situace horší, protože můžeme mít $a + b \geq 0$ i $a + b < 0$.
   Probereme tedy obě možnosti.

   a) Nechť $a + b \geq 0$.
      Potom $|a + b| = a + b$. Chceme tedy ukázat, že $a - b \geq a + b$. Uděláme pár úprav.

$$
\begin{aligned}
a - b &\overset{?}{\geq} a + b \\
-b &\overset{?}{\geq} b \\
0 &\overset{?}{\geq} 2b \\
0 &\overset{?}{\geq} b
\end{aligned}
$$

      Což platí neboť v tomto případě uvažujeme dokonce $b < 0$.

   b) Nechť $a + b < 0$.
      Potom $|a + b| = -(a + b)$. Chceme tedy ukázat, že $a - b \geq -(a + b)$.

Uděláme pár úprav.

$$\begin{aligned} a - b &\overset{?}{\geq} -(a+b) \\ a - b &\overset{?}{\geq} -a - b \\ a &\overset{?}{\geq} -a \\ 2a &\overset{?}{\geq} 0 \\ a &\overset{?}{\geq} 0 \end{aligned}$$

Což platí neboť v tomto případě uvažujeme $a \geq 0$.

4. Nechť $a \geq 0$ a $b < 0$.
   Vzhledem k tomu, že dokazované tvrzení je symetrické vůči proměnným a a b, lze tento bod dokázat analogicky k předchozímu bodu 3.

Zadání:
Dokažte $|a| + |b| \geq |a + b|$.
Kde $|x|$ označuje absolutní hodnotu čísla x, čili $|x| = x$ pro $x \geq 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

Řešení 2 (stručné):
Tvrzení dokážeme tak, že probereme všechny níže uvedené možnosti:

1. Nechť $a \geq 0$ a $b \geq 0$.
   Pak $|a| + |b| = a + b = |a + b|$, protože $a + b > 0$.

2. Nechť $a < 0$ a $b < 0$.
   Pak $|a| + |b| = -a + (-b) = -(a + b) = |a + b|$, protože $a + b < 0$.

3. Nechť $a \geq 0$ a $b < 0$.
   Nyní $|a| + |b| = a + (-b) = a - b$. Chceme tedy ukázat, že $a - b \geq |a + b|$.
   Zde je situace horší, protože můžeme mít $a + b \geq 0$ i $a + b < 0$.
   Probereme tedy obě možnosti.

   a) Nechť $a + b \geq 0$.
      Protože $b < 0$, tak přičtení b zmenšuje hodnotu.
      Pak $|a| + |b| = a - b \geq a - b + b = a \geq a + b = |a + b|$.

   b) Nechť $a + b < 0$.
      Protože $a \geq 0$, tak odečtení a změtší hodnotu (nebo nechá stejné pro $a = 0$).
      Pak $|a| + |b| = a - b \geq a - b - a = -b \geq -b - a = -(a + b) = |a + b|$.

4. Nechť $a \geq 0$ a $b < 0$.
   Vzhledem k tomu, že dokazované tvrzení je symetrické vůči proměnným a a b, lze tento bod dokázat analogicky k předchozímu bodu 3.

Zadání:
Dokažte $|a| + |b| \geq |a + b|$.
Kde $|x|$ označuje absolutní hodnotu čísla x, čili $|x| = x$ pro $x \geq 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

Řešení 3 (pro ty, kteří neumí počítat s $y < 0$):
Pokud se nedokážete smířit s představou, že $x + y$ může být menší než x. Tak to můžete dokázat takto:
Tvrzení dokážeme tak, že probereme všechny níže uvedené možnosti:

1. Nechť $a \geq 0$ a $b \geq 0$.
   Pak $|a| + |b| = a + b = |a + b|$, protože $a + b > 0$.

2. Nechť $a < 0$ a $b < 0$.
   Položme $a' = -a$ a $b' = -b$. Potom máme $a' > 0$ a $b' > 0$ a dokazujeme tvrzení $|-a'| + |-b'| \geq |-a' + -b'|$.
   Upravíme levou stranu $|-a'| + |-b'| = a' + b'$.
   A upravíme pravou stranu $|-a' + (-b')| = |-(a' + b')| = a' + b'$.
   Pro tuto odrážku jsme hotovi, dokázali jsme (dokonce) rovnost obou stran.

3. Nechť $a \geq 0$ a $b < 0$.
   Položme $b' = -b$. Potom $b' > 0$ a dokazujeme $|a| + |-b'| \geq |a + -b'|$.
   Nyní pro levou stranu $|a| + |-b'| = a + b'$.
   Z druhé strany $|a + (-b')| = |a - b'|$.
   Zde je situace horší, protože můžeme mít $a - b' \geq 0$ i $a - b' < 0$ a $|a - b'|$ se tak může někdy rovnat $a - b'$ a někdy $b' - a$.
   Probereme tedy obě možnosti.

   a) Nechť $a - b' \geq 0$, to jest $a \geq b'$.
      Nyní $|a - b'| = a - b'$, o čemž chceme ukázat, že je menší nebo rovno $a + b'$. Protože $b' > 0$, víme, že $a - b' \leq a \leq a + b'$. A máme, co jsme potřebovali.

   b) Nechť $a - b' < 0$.
      Nyní $|a - b'| = b' - a$, o čemž chceme ukázat, že je menší nebo rovno $a + b'$. Protože $a \geq 0$, víme, že $b' - a \leq b' \leq a + b'$. A máme, co jsme potřebovali.

4. Nechť $a \geq 0$ a $b < 0$.
   Vzhledem k tomu, že dokazované tvrzení je symetrické vůči proměnným a a b, lze tento bod dokázat analogicky k předchozímu bodu 3.

Zadání:
Dokažte $|a| + |b| \geq |a + b|$.
Kde $|x|$ označuje absolutní hodnotu čísla x, čili $|x| = x$ pro $x \geq 0$ a $|x| = -x$ pro $x < 0$.

Řešení 4 (trik s rozdílem: pokud $a < b$, pak existuje $d > 0$ takové, že $a + d = b$):