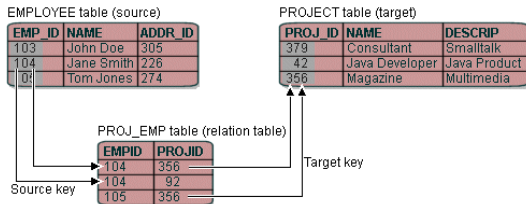


4 Relace a jejich použití

V lekci si podrobně rozebereme matematický aparát relací (a funkcí), kterému se v jeho abstraktní podobě mnoho pozornosti v dřívější výuce nevěnuje – na rozdíl od naivního pohledu na množiny a na „funkce“ ve významu analytických funkcí (jako $x + 1$ či $\sin x$). Přitom na pojem relace velmi brzy narazí každý informatik už jen při studiu dat a databází a její abstraktní podobu bude potřebovat.



Stručný přehled lekce

- * Co je relace a funkce. Reprezentace relací tabulkou a grafem.
- * Základní vlastnosti binárních relací nad množinou.
- * Inverze relace, skládání relací a jeho význam.

Zopakování kartézského součinu

Definice: *Kartézský součin* dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$,
 $\{c, d\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$. □

Definice *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}.$$

- Například $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.1 Relace a funkce nad množinami

Vedle množin dalším důležitým základním „**datovým typem**“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich mnohotvárnému použití v informatice věnujeme významnou pozornost v této i dvou příštích lekcích.

Definice 4.1. Relace mezi množinami A_1, A_2, \dots, A_k , pro $k \in \mathbb{N}$, je **libovolná** podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k. \square$$

Pokud $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$, hovoříme o **k -ární relaci R na A** . \square

Příklady relací.

- $\{(1, a), (2, a), (2, b)\}$ je relace mezi $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b\}$.
- $\{(i, 2 \cdot i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je **binární** relace na \mathbb{N} . \square
- $\{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ je **ternární** relace na \mathbb{N} .
- $\{3 \cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je **unární** relace na \mathbb{N} . \square
- Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na A ?

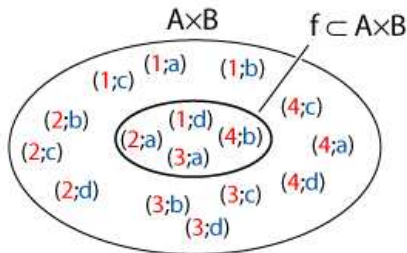
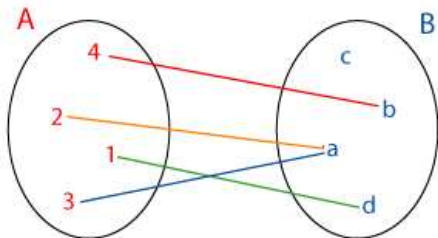
Funkce mezi množinami

Definice 4.2. (Totální) funkce z množiny A do množiny B

je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje **právě jedno** $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. \square

Množina A se nazývá **definiční obor** a množina B **obor hodnot** funkce f .

Neformálně řečeno, ve funkci f je každé „vstupní“ hodnotě x přiřazena **jednoznačně** „výstupní“ hodnota y . (V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme. . .)



Značení: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

Zápis $f : A \rightarrow B$ říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B . □

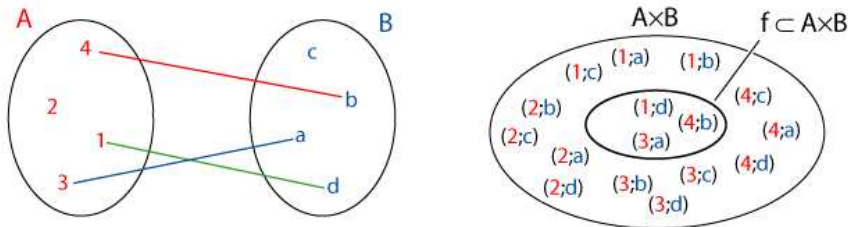
Funkcím se také říká *zobrazení*.

Příklady funkcí jsou třeba následující.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x + 8$.
Pak $f = \{(x, x + 8) \mid x \in \mathbb{N}\}$. □
- Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$.
Pak $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Parciální (částečné) funkce

Definice: Pokud naši Definici 4.2 upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B . \square



V parciální funkci f nemusí být pro některé „vstupní“ hodnoty x funkční hodnota definována (viz například $f(2)$ v uvedeném obrázku).

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak \perp .

Následuje několik příkladů parciálních funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$. \square

- Také funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) = \log x$$

je jen parciální – není definována pro $x \leq 0$. \square

- Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich (česká) rodná čísla?

4.2 Reprezentace konečných relací

Ukládání dat — především sleduje vztahy mezi objekty (stejně jako relace).

↷ relační databáze jako obecná ukázka použití relace.

Příklad 4.3. *Tabulka relační databáze prezentuje obecnou relaci.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- $ZNAK = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, mezera\}$,
- $CISLICE = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.□

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- $JMENO = ZNAK^{15}$, $PRIJMENI = ZNAK^{20}$, $VEK = CISLICE^3$,
- $ZAMESTNANEC$ „ \in “ $JMENO \times PRIJMENI \times VEK$.□

Relaci „typu“ $ZAMESTNANEC$ pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

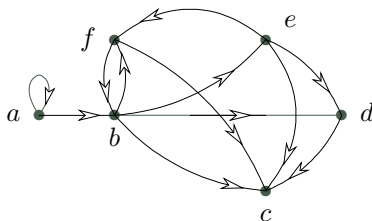
□

Reprezentace binárních relací na množině

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky M znázorníme jako body v rovině.
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z a do b .
Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka“ na a . □

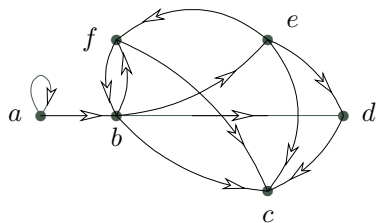
Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:



Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé třeba z matematické analýzy. □

V případě, že M je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží také na míře „pravidelnosti“ R).

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně zapsat také pomocí *matice* relace – matice A typu $M \times M$ s hodnotami z $\{0, 1\}$.



→

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

□

A závěrem se můžeme opět vrátit k reprezentaci tabulkou...

JMENO	PRIJMENI
Jan	Novák
Petr	Vichr
Pavel	Zíma
Stanislav	Novotný

4.3 Vlastnosti binárních relací na množině

Definice 4.4. Necht' $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

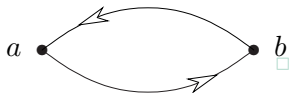
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;



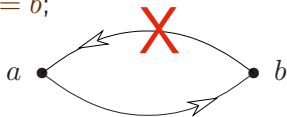
- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;



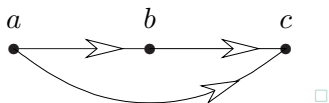
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



Následují dva základní typy binárních relací; kde R je

- relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní; \square
- *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*). \square

Pozor, může být relace *symetrická i antisymetrická zároveň*? \square Ano!



Ukázkové binární relace

Příklad 4.5. Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.

Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo;
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme t. na celé mm);
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm;
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y ;
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm);
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y .

Které z nich tedy jsou ekvivalencí nebo uspořádáním?

Příklad 4.6. Jaké vlastnosti mají následující relace?

- Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y . □
(Částečné uspořádání, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.) □
- Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □ (Ekvivalence.) □
- Necht' $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Bud' $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x . □ (Ireflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ale ne reflexivní – není uspořádáním.) □ □

Co v případě, že naše relace některou z poptávaných vlastností nemá, ale nám by se ta vlastnost hodila? To řeší tzv. **uzávěry relací**: □

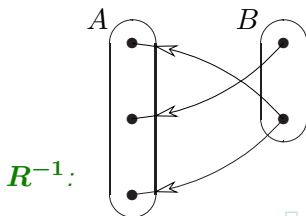
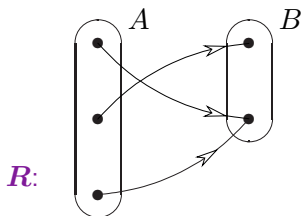
- Reflexivní uzávěr přidá do relace všechny dvojice (x, x) nad množinou.
- Symetrický uzávěr zahrne do relace všechny obrácené dvojice k existujícím dvojicím, neboli všechna chybějící (x, y) pokud $(y, x) \in R$. □
- Tranzitivní uzávěr nelze popsat až tak jednoduše, ale stručně řečeno přidává do relace všechny ty dvojice (x, y) , pro které se lze (v grafu relace) dostat z x do y „po šipečkách“.

4.4 Inverzní relace a skládání relací

Ve výkladu se nyní vrátíme k obecnému pojetí relací mezi množinami.

Definice: Necht' $R \subseteq A \times B$ je binární relace mezi A a B . *Inverzní relace* k relaci R se značí R^{-1} a je definována takto:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$



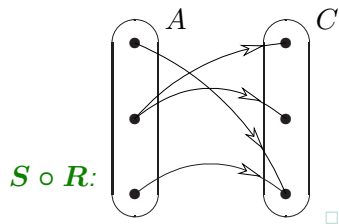
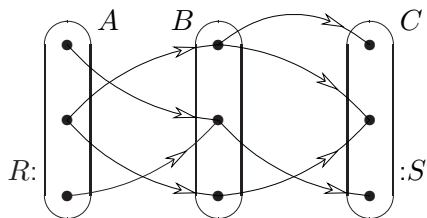
R^{-1} je tedy relace mezi B a A .

Definice skládání

Definice 4.7. Složení (kompozice) relací R a S .

Nechť $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ jsou binární relace. **Složení** relací R a S (v tomto pořadí!) je relace $S \circ R \subseteq A \times C$ definovaná takto: \square

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \text{existuje } b \in B \text{ takové, že } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$



Složení relací čteme „ R složeno s S “ nebo (pozor na pořadí!) „ S po R “.

Několik matematických příkladů skládání relací následuje zde.

- Je-li
 - * $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{X, Y\}$,
 - * $R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}$, $S = \{(1, X)\}$,

pak složením vznikne relace

$$* S \circ R = \{(a, X), (b, X)\}. \square$$

- Složením funkcí $h(x) = x^2$ a $f(x) = x + 1$ na \mathbb{R} vznikne funkce

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = x^2 + 1. \square$$

- Složením těchto funkcí „naopak“ ale vznikne funkce

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = (x + 1)^2. \square$$

Poznámka: Nepříjemné je, že v některých oblastech matematiky (například v algebře při skládání zobrazení) se setkáme s právě opačným zápisem skládání, kdy se místo $S \circ R$ píše $R \cdot S$ nebo jen RS .

4.5 Skládání relací „v praxi“

Příklad 4.8. *Skládání v relační databázi studentů, jejich předmětů a fakult.*

Mějme dvě binární relace – jednu R přiř. studentům MU kódy jejich zapsaných předmětů, druhou S přiř. kódy předmětů jejich mateřským fakultám.

R :

student (učo)	předmět (kód)
121334	MA010
133935	M4135
133935	IA102
155878	M1050
155878	IB000

S :

předmět (kód)	fakulta MU
MA010	FI
IB000	FI
IA102	FI
M1050	PřF
M4135	PřF

Jak z těchto „tabulkových“ relací zjistíme, kteří studenti mají **zapsané předměty na kterých fakultách** (třeba na FI)? □

Jedná se jednoduše o **složení relací** $S \circ R$. V našem příkladě třeba:

$S \circ R$:

student (učo)	fakulta MU
121334	FI
133935	FI
133935	PřF
155878	FI
155878	PřF

Zobecněné skládání relací

Definice: (skládání relací vyšší arity): Mějme relace $T \subseteq K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k$ a $U \subseteq L_1 \times L_2 \times \dots \times L_\ell$, přičemž pro nějaké $m < \min(k, \ell)$ platí $L_1 = K_{k-m+1}, L_2 = K_{k-m+2}, \dots, L_m = K_k$. Pak relaci T lze složit s relací U na zvolených m složkách L_1, \dots, L_m („překrytí“) s použitím Definice 4.7 takto:

- Položme $A = K_1 \times \dots \times K_{k-m}$, $B = L_1 \times \dots \times L_m$ a $C = L_{m+1} \times \dots \times L_\ell$.
- Příslušné relace pak jsou
 - * $R = \{(\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B \mid (a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_m) \in T\}$ a
 - * $S = \{(\vec{b}, \vec{c}) \in B \times C \mid (b_1, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_\ell) \in U\}$. □
- Nakonec přirozeně položme $U \circ_m T \simeq S \circ R$, takže vyjde $U \circ_m T = \{(\vec{a}, \vec{c}) \mid \text{ex. } \vec{b} \in B, \text{ že } (a_1, \dots, a_{k-m}, b_1, \dots, b_m) \in T \text{ a } (b_1, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_\ell) \in U\}$.

Schematicky pro snadnější orientaci:

$$\begin{array}{l} T \subseteq \boxed{K_1 \times \dots \times K_{k-m}} \times \boxed{K_{k-m+1} \times \dots \times K_k} \\ U \subseteq \underbrace{}_{B} \times L_{m+1} \times \dots \times L_\ell \\ U \circ_m T \subseteq \underbrace{\boxed{K_1 \times \dots \times K_{k-m}}}_{A} \times \underbrace{}_{B} \times \underbrace{\boxed{L_{m+1} \times \dots \times L_\ell}}_{C} \end{array}$$

Příklad 4.9. Skládání v relační databázi pasažérů a letů u leteckých společností.

Podívejme se na příklad hypotetické rezervace letů pro cestující, relace T . Jak známo (tzv. codeshare), letecké společnosti si mezi sebou „dělí“ místa v letadlech, takže různé lety (podle kódů) jsou ve skutečnosti realizovány stejným letadlem jedné ze společností. To zase ukazuje relace U .

T :

pasažér	datum	let
Petr	5.11.	OK535
Pavel	6.11.	OK535
Jan	5.11.	AF2378
Josef	5.11.	DL5457
Alena	6.11.	AF2378

U :

datum	let	letadlo
5.11.	OK535	ČSA
5.11.	AF2378	ČSA
5.11.	DL5457	ČSA
6.11.	OK535	AirFrance
6.11.	AF2378	AirFrance

Ptáme-li se nyní, setkají se Petr a Josef na palubě stejného letadla? Případně, čím letadlo to bude? Odpovědi nám dá složení relací $U \circ_2 T$, jak je popsáno výše.

$U \circ_2 T$:

pasažér	letadlo
Petr	ČSA
Josef	ČSA
Pavel	AirFrance
...	...

