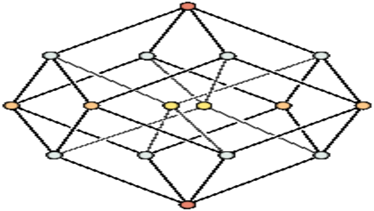
5 Ekvivalence, Uspořádané množiny

V této lekci dále pokračujeme probíráním binárních relací na množinách jako nástrojů vyjadřujících vztahy mezi objekty. Zaměřujeme se nyní především na relace „srovnávající“ objekty podle jejich vlastností – buď na formy shodnosti nebo uspořádání.



□

Stručný přehled lekce

* Relace ekvivalence, jím odpovídající rozklady množin.
* Uspořádané množiny a relevantní pojmy k uspořádání.
* Hasseovské diagramy uspořádaných množin.

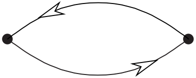
Vlastnosti binárních relací, zopakování

Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

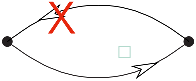
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a,a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a,a) \notin R$;

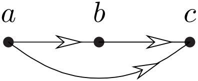
- *symetrická*, právě když pro každé $a,b \in M$ platí, že jestliže $(a,b) \in R$, pak také $(b,a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a,b \in M$ platí, že jestliže $(a,b),(b,a) \in R$, pak $a = b$;



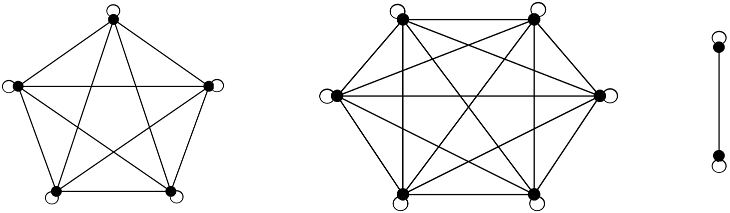
- *tranzitivní*, právě když pro každé $a,b,c \in M$ platí, že jestliže $(a,b),(b,c) \in R$, pak také $(a,c) \in R$.



5.1 Relace ekvivalence

- Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalence.

- Jak vypadá graf relace ekvivalence?



- Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“.

Značení. V případě relace ekvivalence se poměrně často lze setkat s označením jako $\sim$ či $\approx$ místo R. Místo $(x, y) \in R$ se pak píše $x \approx y$.

Další ukázkové binární relace

Příklad 5.1. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ a zkoumejme, zda se jedná o ekvivalence:*

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů;
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku nebo stejnou barvu vlasů.

U kterého body se nejedná o relaci ekvivalence a proč?

Je to poslední případ, kdy není splněna tranzitivita! □

Tvrzení 5.2. *Nechť R, S jsou dvě relace ekvivalence na stejné množině M. Pak jejich průnik $R \cap S$ je opět relací ekvivalence.*

Příklad 5.3. *Nechť* $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je binární relace definovaná takto:* $(x, y) \in R$ *právě když* $|x - y|$ *je dělitelné třemi.*

V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné“? □Dávají stejný zbytek po dělení třemi. □ □

Příklad 5.4. *Buď* R *binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto:* $(x, y) \in R$ *právě když* x *i* y *sedí v první lavici.* □

Už na první pohled jde o relaci symetrickou a tranzitivní. Proč se v tomto případě nejedná o relaci ekvivalence? □
Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

5.2 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 5.5. Rozklad množiny. Nechť M je množina.
Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \not\in \mathcal{N}$ (tj. každý prvek $\mathcal{N}$ je neprázdná podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$.□

Prvkům $\mathcal{N}$ se také říká *třídy rozkladu*.

- Buď $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M.□
- Nechť $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$.
  Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ podle zbytkových tříd.□

Každý rozklad $\mathcal{N}$ na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M:

Věta 5.6. *Nechť M je množina a $\mathcal{N}$ rozklad na M. Nechť $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto*

$$(x, y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x, y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je ekvivalence na M. □

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní (Def. 4.4). □

- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož $\mathcal{N}$ je rozklad na M, musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 5.5). Proto $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. □
- Symetrie: Nechť $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$. To ale znamená, že také $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. □
- Tranzitivita: Nechť $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A, B \in \mathcal{N}$ takové, že $x, y \in A$ a $y, z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 5.5 platí $A = B$. Tedy $x, z \in A = B$, proto $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$.

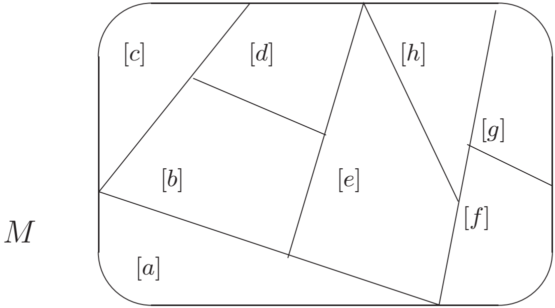
□

Každá ekvivalence R na M naopak jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M:

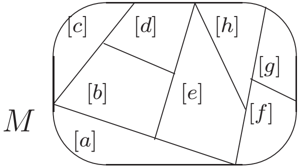
Věta 5.7. *Nechť M je množina a R ekvivalence na M. Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad na M, který značíme M/R. □



Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky Definice 5.5.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$. □
- Nechť $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. □

  Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x,z),(y,z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y,z) \in R$, platí $(z,y) \in R$. Jelikož $(x,z),(z,y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x,y) \in R$. Proto také $(y,x) \in R$ (opět ze symetrie R). □Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:

  * „$[x] \subseteq [y]$": Nechť $v \in [x]$. Pak $(x,v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y,x) \in R$ (viz výše), tedy $(y,v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$. □
  * „$[y] \subseteq [x]$": Nechť $v \in [y]$. Pak $(y,v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x,y) \in R$ (viz výše), tedy $(x,v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$. □
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. □

5.3 Uspořádání a uspořádané množiny

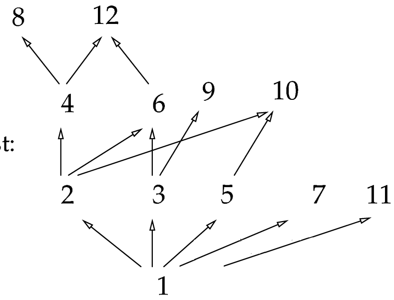
- Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ *(částečné) uspořádání* právě když R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je uspořádáním.

- Neformálně řečeno: uspořádání je taková relace $R \subseteq M \times M$, kde $(x, y) \in R$ právě když x je v nějakém smyslu „menší nebo rovno“ než y.

  Mohou ovšem existovat taková $x, y \in M$, kde neplatí $(x, y) \in R$ ani $(y, x) \in R$. (Pak říkáme, že x a y jsou *nesrovnatelné*.)

- Jak názorně zobrazit (částečné) uspořádání? Zjednodušeně takto:

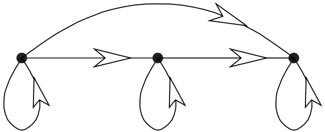
dělitelnost:



Značení. Pro větší přehlednost se relace uspořádání často značí symboly jako $\sqsubseteq$ či $\preceq$ místo prostého R. I my budeme psát třeba $x \preceq y$ místo $(x, y) \in R$.

Poznámka: Zajisté jste se již setkali s „neostrým“ uspořádáním čísel $\leq$ a „ostrým“ uspořádáním $<$. □Všimněte si dobře, že námi definované uspořádání je vždy „neostré“.

Pokud byste naopak chtěli definovat „ostré“ uspořádání, mělo by vlastnosti ireflexivní, antisymetrické a tranzitivní. (Příliš se však tato varianta nepoužívá.)

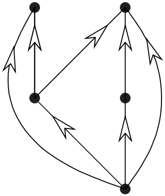


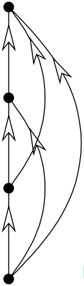
□

Nadále budeme pracovat pouze s neostrým uspořádáním, ale smyčky vyplývající z reflexivity a případně i tranzitivity budeme pro větší přehlednost v obrázcích vynechávat.

Uspořádaná množina

Definice 5.8. **Uspořádaná množina** je dvojice $(M, \preceq)$, kde M je množina a $\preceq$ je (částečné) uspořádání na M. □





□

Definice: Uspořádání $\preceq$ na M je *lineární* (nebo také *úplné*), pokud každé dva prvky M jsou v $\preceq$ srovnatelné.

Příklady uspořádaných množin

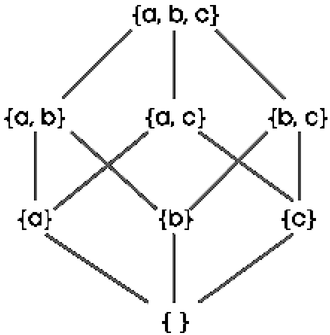
Příklad 5.9. *Nechť* M *je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace uspořádání* $R \subseteq M \times M$ *definované následovně (jedná se vždy o uspořádání?):*

- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y; $\square$
- $(x, y) \in R$ právě když y má alespoň takovou výšku jako x; $\square$
- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo. $\square$

Ano, i v posledním bodě se jedná o uspořádání. Zajímavé, že? $\square$

Příklad 5.10. *Další ukázky uspořádaných množin následují zde:*

- $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineárně uspořádaná množina, kde $\leq$ má „obvyklý" význam.
- $(\mathbb{N}, |\,)$, kde $a|b$ je relace dělitelnosti „a dělí b" na přirozených číslech, je uspořádaná množina. Toto uspořádání není lineární.
- Buď M množina. Pak $(2^M, \subseteq)$ je uspořádaná množina (říkáme *inkluzí*). Které dvojice jsou v uspořádání inkluzí nesrovnatelné?



□

Jak rozšířit uspořádání na větší množiny

Příklad 5.11. *Uspořádání „po složkách".*

Nechť $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci $\sqsubseteq$ na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \sqsubseteq (a', b') \quad \text{právě když} \quad a \leq_A a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \sqsubseteq)$ je uspořádaná množina. Toto usp. se nazývá „po složkách". □

Příklad 5.12. *Lexikografické uspořádání.*

Nechť $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou uspořádané množiny. Definujme binární relaci $\preceq$ na $A \times B$ předpisem

$$(a, b) \preceq (a', b') \quad \text{právě když} \quad \text{buď } a \leq_A a' \text{ a } a \neq a', \text{ nebo } a = a' \text{ a } b \leq_B b'.$$

Pak $(A \times B, \preceq)$ je uspořádaná množina. Navíc pokud $\leq_A$ i $\leq_B$ jsou lineární, je i $\preceq$ lineární. Toto uspořádání se nazývá lexikografické. □

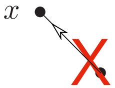
Fakt: Jsou-li $(A_1, \leq_1), \cdots, (A_n, \leq_n)$ uspořádané množiny, kde $n \geq 2$, pak množinu $A_1 \times \cdots \times A_n$ lze uspořádat třeba po složkách nebo lexikograficky.

Všimněte si, že lexikograficky se například řadí slova ve slovníku...

5.4 Další pojmy uspořádaných množin

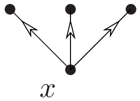
Definice 5.13. Nechť $(M, \preceq)$ je uspořádaná množina.
Prvek $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ je

- *minimální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $y \preceq x$, pak $x \preceq y$.
(Tj. x je minimální právě když neexistuje žádný prvek ostře menší než x.)



- *maximální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že jestliže $x \preceq y$, pak $y \preceq x$.
(Tj. x je maximální právě když neexistuje žádný prvek ostře větší než x.)

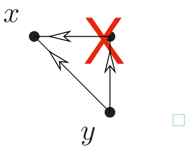
- *nejmenší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.



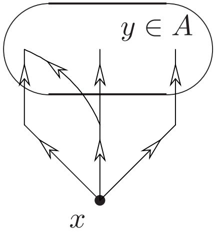
- *největší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.

Prvek $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$

- *pokrývá* $y \in M$ právě když $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žádné $z \in M$ takové, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.

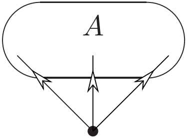


- je *dolní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $x \preceq y$ pro každé $y \in A$.



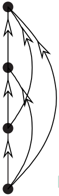
- je *horní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $y \preceq x$ pro každé $y \in A$.

- $x \in M$ je *infimum* množiny $A \subseteq M$ právě když x je největší dolní závora (mez) množiny A.



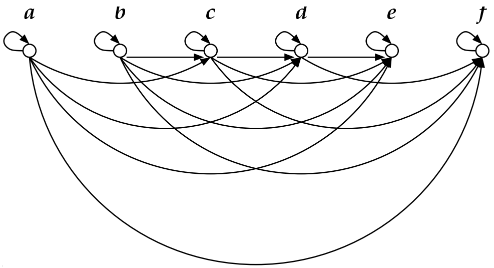
- $x \in M$ je *supremum* množiny $A \subseteq M$, právě když x je nejmenší horní závora (mez) množiny A. □

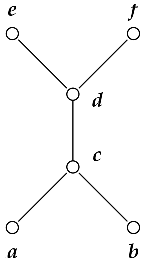
- $A \subseteq M$ je *řetězec* v uspořádání $\preceq$ právě když $(A, \preceq)$ je *lineárně* uspořádaná množina.


□

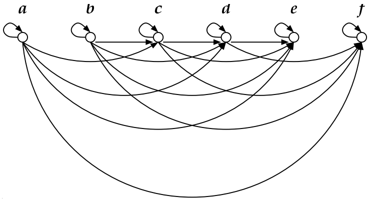
Hasseovské diagramy

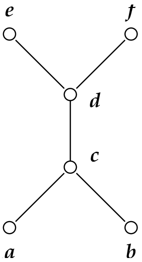
Motivací zavedení tzv. Hasseovských diagramů uspořádaných množin jsou přehlednější „obrázky" než u grafů relací. Například si srovnejte následující:





Zjednodušení a konvence přinesené následující definicí jsme ostatně měli možnost vidět už na některých z předchozích ilustračních obrázků uspořádání.

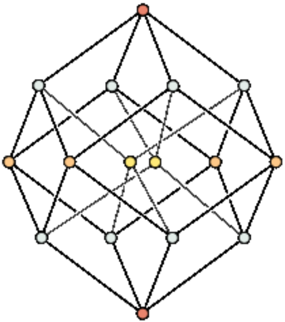




Definice: *Hasseovský diagram* konečné uspořádané množiny $(M, \preceq)$ je jeho (jednoznačné) grafické znázornění získané takto:

- Do první „horizontální vrstvy“ zakreslíme body odpovídající minimálním prvkům $(M, \preceq)$. (Tj. které nepokrývají nic.)$\square$
- Máme-li již zakreslenu vrstvu i, pak do vrstvy $i+1$ (která je „nad“ vrstvou i) zakreslíme všechny nezakreslené prvky, které pokrývají pouze prvky vrstev $\leq i$. Pokud prvek x vrstvy $i+1$ pokrývá prvek y vrstvy $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. „čárou“).

Příklad 5.15. *Relaci inkluze na čtyřprvkové množině* $\{a, b, c, d\}$ *zakreslíme Hasseovským diagramem takto:*



□

Jak vidíme, v Hasseovském diagramu „vynecháváme" ty hrany relace $\preceq$, které vyplývají z reflexivity či tranzitivity. To celý obrázek výrazně zpřehlední, a přitom nedochází ke ztrátě informace.

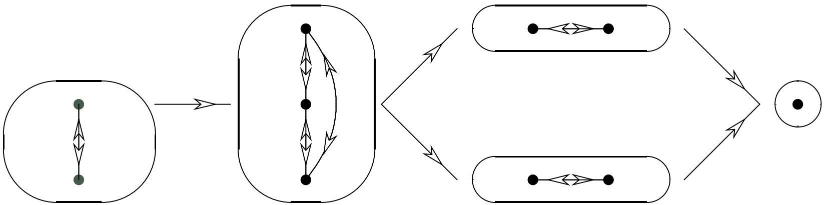
Lze vynechat i šipky na hranách, neboť dle definice všechny míří „vzhůru".

Také pojem „*vrstvy*" v definici je jen velmi neformální, důležité je, že větší (pokrývající) prvky jsou nad menšími (pokrývanými).

5.5 Relace předuspořádání

Definice: Relace $R \subseteq M \times M$ je *předuspořádání* (také *kvaziuspořádání*, nebo *polouspořádání*) právě když R je reflexivní a tranzitivní. □

Rozdíl mezi uspořádáním a předuspořádáním je (neformálně řečeno!) v tom, že u předuspořádání srovnáváme prvky podle kritéria, které není pro daný prvek jedinečné. V předuspořádání takto mohou vznikat „balíky“ (třídy) se stejnou hodnotou kritéria, což schematicky ilustrujeme na následujícím obrázku.



Z předuspořádání na uspořádání

Věta 5.16. *Je-li* $\sqsubseteq$ *předuspořádání na* M, *můžeme definovat relaci* $\sim$ *na* M *předpisem*

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak $\sim$ *je ekvivalence na* M, *která se nazývá jádro předuspořádání* $\sqsubseteq$. □

Na rozkladu $M/\sim$ *pak lze zavést relaci* $\preceq$ *definovanou takto*

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ *je uspořádaná množina indukovaná* $\sqsubseteq$. □

Pro ukázku si vezměme relaci dělitelnosti na $\mathbb{Z}$. Pak třeba $-2 \sim 2$.
Jádrem zde jsou dvojice čísel stejné absolutní hodnoty.

Věta 5.16. *Je-li $\sqsubseteq$ předuspořádání na M, můžeme definovat relaci $\sim$ na M předpisem*

$$x \sim y \quad \textit{právě když} \quad x \sqsubseteq y \textit{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak $\sim$ je ekvivalence na M, která se nazývá jádro předuspořádání $\sqsubseteq$.

Na rozkladu $M/\sim$ pak lze zavést relaci $\preceq$ definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \textit{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je uspořádaná množina.

Důkaz (náznak): Tranzitivita a reflexivita relace $\sim$ vyplývá z tranzitivity a reflexivity relace $\sqsubseteq$. Symetrie $\sim$ pak je přímým důsledkem její definice. Tudíž $\sim$ skutečně je relací ekvivalence a $M/\sim$ je platný rozklad.

Tranzitivita a reflexivita relace $\preceq$ se opět dědí z relace $\sqsubseteq$. Její antisymetrie vyplývá následující úvahou: Pokud $[x] \preceq [y]$ a $[y] \preceq [x]$, pak podle naší definice $x \sqsubseteq y$ a $y \sqsubseteq x$, neboli $x \sim y$ a $[x] = [y]$ podle definice tříd rozkladu.

Pozor, nejdůležitější částí této větve důkazu je však ještě zdůvodnění, že naše podaná definice vztahu $[x] \preceq [y]$ je korektní, což znamená, že její platnost nezávisí na konkrétní volbě reprezentantů x z $[x]$ a y z $[y]$. □