IB102 – úkol 3, příklad 1 – řešení Odevzdání: 6. 10. 2014

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

1. [3 body] O každém z následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b, \#\}$ rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

Tedy je-li vaše odpověď, že se jedná o regulární jazyk, uveďte příslušnou regulární gramatiku nebo deterministický konečný automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás naopak o regulární jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání* (Pumping lemma).

a) $L_1 = \{u\#v \mid u, v \in \{a, b\}^*$ a slovo v je podslovem slova $u\}$

b) $L_2 = \{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*$ a slovo v je podslovem slova $u\}$

---

a) **Jazyk L_1 není regulární.**

Neregularitu jazyka L_1 dokážeme obměnou tvrzení *Lemmatu o vkládání.*

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo, nadále pevné.
- Zvolme slovo $w = a^n\#a^n$. Slovo w jistě patří do jazyka L_1, protože slovo a^n je podslovem slova a^n, a zároveň jistě platí $|w| \geq n$.
- Nechť $x, y, z \in \Sigma^*$ jsou libovolná slova taková, že platí $w = xyz$, $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$. Tedy slova x, y, z musí být ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= a^k, \\ y &= a^l, \\ z &= a^{n-k-l}\#a^n \end{aligned}$$

  pro vhodná čísla k, l taková, že $k \geq 0$, $l > 0$ a $k + l \leq n$.
- Zvolme $i = 0$, potom platí

$$xy^iz = xy^0z = xz = a^ka^{n-k-l}\#a^n = a^{n-l}\#a^n.$$

  Ale pak slovo xy^0z nenáleží do jazyka L_1, protože platí $l > 0$, a tudíž slovo a^n nemůže být podslovem slova a^{n-l}. Tedy z Lemmatu o vkládání vyplývá, že jazyk L_1 není regulární.

b) **Jazyk L_2 je regulární.**

Klíčové pozorování je, že platí rovnost $L_2 = \{a, b\}^*$. Libovolné slovo $w \in \{a, b\}^*$ lze totiž napsat ve tvaru $w = w \cdot \varepsilon$ a ε je jistě podslovem slova w. Stačí tedy najít deterministický konečný automat akceptující jazyk $\{a, b\}^*$. Takovým automatem je například automat