IB102 – úkol 5, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 20. 10. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

1. [2 body] Rozhodněte a dokažte, zda je třída regulárních jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ uzavřena na unární operaci *zlibovolni*:

$$\begin{aligned} \mathit{zlibovolni}(L) = \{u_1^{i_1}u_2^{i_2}\dots u_n^{i_n} \mid {} & n \in \mathbb{N}_0 \wedge u_1, u_2, \dots, u_n \in \Sigma \\ & \wedge u_1u_2\dots u_n \in L \wedge i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Tedy, intuitivně řečeno, jazyk $\mathit{zlibovolni}(L)$ obsahuje všechna slova z jazyka L a navíc všechna slova, která z nich vzniknou tak, že tak, že každé písmeno ve slově $w \in L$ libovolněkrát za sebou zopakujeme (nikoliv však odstraníme). Speciálně pak $\varepsilon \in \mathit{zlibovolni}(L)$ právě tehdy, když $\varepsilon \in L$.

Uveďme ještě příklady:

$$\begin{aligned} \mathit{zlibovolni}(\{c, ab\}) &= \{c\}^+ \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^+ \\ &= \{c, ab, cc, aab, abb, ccc, aaab, aabb, abbb, cccc, \dots\} \\ \mathit{zlibovolni}(\{\varepsilon, abc\}) &= \{\varepsilon\} \cup \{a\}^+ \cdot \{b\}^+ \cdot \{c\}^+ \\ &= \{\varepsilon, abc, aabc, abbc, abcc, aabbc, aabcc, abbcc, \dots\} \\ \mathit{zlibovolni}(\{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{a\}) &= \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{a\}^+ \end{aligned}$$

Nápověda: Pokud rozhodnete, že třída regulárních jazyků není uzavřená na operaci *zlibovolni*, uveďte příslušný protipříklad. Pokud rozhodnete, že třída regulárních jazyků je uzavřená na operaci *zlibovolni*, musíte toto tvrzení dokázat, například s pomocí známých uzávěrových vlastností třídy regulárních jazyků, nebo konstruktivně popsáním algoritmu na transformaci nějakého formalismu pro popis regulárních jazyků.

Třída regulárních jazyků je uzavřená na operaci *zlibovolni*. To můžeme dokázat dvěma způsoby, buďto pomocí popisu transformace konečného automatu (automat původně akceptující slova z jazyka L po transformaci bude akceptovat slova z jazyka $\mathit{zlibovolni}(L)$), nebo můžeme využít ekvivalence regulárních jazyků s regulárními výrazy a uzavřenost operace dokázat úpravou regulárního výrazu.

Důkaz pomocí převedení na regulární výraz

Jazyk L převedeme na regulární výraz. Tím nám vznikne konečná posloupnost *základních regulárních výrazů* (tedy výrazů $\varepsilon, \emptyset$ a a pro každé $a \in \Sigma$), operací sjednocení, zřetězení a iterace a závorek. Operaci *zlibovolni* pak na regulárním výrazu provedeme tak, že nad všemi *základními regulárními výrazy* provedeme operaci pozitivní iterace. Takto vzniklé podvýrazy po provedení operace pozitivní iterace budou stále regulárními výrazy, a i výsledný regulární výraz bude tedy validním regulárním výrazem a tedy bude popisovat regulární jazyk. Tím pádem je jazyk $\mathit{zlibovolni}(L)$ regulární pro libovolný regulární jazyk L a třída regulárních jazyků je tedy uzavřená na operaci *zlibovolni*.

IB102 – úkol 5, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 20. 10. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Důkaz pomocí transformace konečného automatu

Pro jazyk L si zkonstruujeme konečný automat. Pro každý přechod v konečném automatu vytvoříme nový pomocný stav. Do pomocného stavu vedeme přechod z původního stavu pod původním symbolem. Nad novým stavem vytvoříme smyčku nad oním symbolem a z nového stavu se vrátíme pod ε do druhého stavu. Z ekvivalence DFA s NFA s ε-kroky vyplývá, že výsledný konečný automat bude stále akceptovat slova regulárního jazyka.

Formálněji napsaná transformace:
Původní automat je dán pěticí

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

transformovaný automat

$$\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F).$$

Pro každý přechod

$$\delta(q_m, a) = q_o,$$

kde $q_m, q_o \in Q, a \in \Sigma$ vytvoříme nový stav $q_n \in Q', q_n \notin Q$ a nové přechody

$$\delta'(q_m, a) = q_n \qquad \delta'(q_n, a) = q_n \qquad \delta'(q_n, \varepsilon) = q_o.$$

Mohlo by se zdát, že stačí vytvořit smyčky nad všemi stavy a nemusíme vytvářet nové stavy, to však nefunguje: uvažme stav, z něhož vychází 2 šipky, jedna pod a a druhá pod b (stav nemá žádnou smyčku). Pokud bychom přidali smyčky pod a, b k tomuto stavu, pak v tomto stavu budeme moci míchat písmena a, b, což se však stát nemá (tento stav nastane například u jazyka $\{a, b\}$, přičemž platí, že $\mathit{zlibovolni}(\{a, b\}) = \{a\}^+ \cup \{b\}^+$, avšak pouhým přidáním smyček bychom dostali $\{a, b\}^*$). Obdobně by problém nastal i pokud bychom přidali smyčky k cílovému stavu šipky.

Důkaz pomocí regulárního přechodového grafu

Asi nejelegantnějším konstruktivním důkazem je důkaz za pomoci regulárního přechodového grafu:

1. Sestrojíme konečný (může být nedeterministický i s ε-kroky) automat popisující jazyk L
2. tento konečný automat je zároveň i regulárním přechodovým grafem
3. každou hrany pod libovolným písmenem $a \in \Sigma$ nahradíme hranou pod regulárním výrazem a^+
4. výsledkem je regulární přechodový graf popisující jazyk $\mathit{zlibovolni}(L)$

IB102 – úkol 5, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 20. 10. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Výsledek je nutně *zlibovolni*(L), protože kdykoli jsme mohli v původním automatu mít jedno písmeno, nyní můžeme mít neomezené nenulové opakování téhož písmene. Výsledek rovněž nutně popisuje regulární jazyk (z ekvivalence NFA a regulárních přechodových grafů).

Tedy třída regulárních jazyků je tedy uzavřena na operaci *zlibovolni*.