## IB102 – úkol 8, příklad 1 – řešení    Odevzdání: 24. 11. 2014

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

**1. [2 body]** O následujícím jazyku rozhodněte, zda je bezkontextový, a své tvrzení dokažte.

$$L = \{a^m b^n c^{\max(m,n)} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

V případě, že je vaše odpověď, že se jedná o bezkontextový jazyk, uveďte příslušnou bezkontextovou gramatiku, nebo deterministický zásobníkový automat. V opačném případě své tvrzení dokažte pomocí *Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky* (Pumping lemma pro CFL).

---

**Řešení:** *Jazyk $L$ není bezkontextový.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme obměnou lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky.

Chceme tedy dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje slovo $z \in L$ takové, že $|z| > n$ a pro všechna slova $u, v, w, x, y$ splňující $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$ existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $uv^iwx^iy \notin L$. Z obměny tvrzení lemmatu o vkládání pak vyplývá, že jazyk $L$ není bezkontextový.

- Nechť tedy $n \in \mathbb{N}$ je libovolné přirozené číslo, dále však pevné.
- Zvolíme slovo $z = a^n b^n c^n$. Jistě $z \in L$ a $|z| > n$.
- Buď $z = uvwxy$ libovolné rozdělení slova $z$, kde $vx \neq \varepsilon$, $|vwx| \leq n$. Pak pro tvar slova $vx$ mohou nastat následující případy:

  1. $vx \in \{a\}^+$: Pak $vx = a^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ $(k > 0)$. Volbou $i = 2$ získáme slovo $z' = uv^2wx^2y = a^{n+k}b^nc^n$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $n + k > n$ (slovo obsahuje více $a$ než $c$).
  2. $vx \in \{a\}^+\{b\}^+$: Pak $vx = a^kb^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ $(k, l > 0)$. Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = uwy = a^{n-k}b^{n-l}c^n$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $n - k \neq n$ i $n - l \neq n$ (slovo obsahuje jiný počet $a$ i $b$ než $c$).
  3. $vx \in \{b\}^+$: Obdobně jako v případě 1.
  4. $vx \in \{b\}^+\{c\}^+$: Pak $vx = b^kc^l$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ $(k, l > 0)$. Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = uwy = a^nb^{n-k}c^{n-l}$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $n - l < n$ (slovo obsahuje větší počet $a$ než $c$).
  5. $vx \in \{c\}^+$: Pak $vx = c^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ $(k > 0)$. Volbou $i = 0$ získáme slovo $z' = uv^0wx^0y = a^nb^nc^{n-k}$. Slovo $z'$ nenáleží do jazyka $L$, protože $n - k < n$ (slovo obsahuje více $a$ i $b$ než $c$).

Jiné případy rozdělení nastat nemohou, protože platí $|vwx| \leq n$, tudíž slovo $vx$ může obsahovat nejvíce dva různé znaky abecedy. Celkově jsme pro každé rozdělení našli $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že slovo $uv^iwx^iy \notin L$, a tedy podle lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky jazyk $L$ není bezkontextový. □