

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

**1. [2 body]** Sestrojte deterministický úplný jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk  $L$ . Princip práce vašeho Turingova stroje popište slovně a poté stroj zdefinujte i formálně.

$$L = \{a^n b^k \mid n \geq 0, k > 0, n \text{ je dělitelné } k\}$$

Na intuitivní úrovni bude hledaný Turingův stroj pracovat tak, že pro vstupní slovo ve tvaru  $a^n b^k$  pro  $n \geq 0, k > 0$  na pásce bude opakovaně přepisovat  $k$  výskytů znaku  $a$  znaky  $A$ . Pokud po nějakém z těchto kroků zůstane na pásce méně než  $k$  znaků  $a$ , není vstupní slovo v jazyce  $L$ , protože  $n$  není dělitelné  $k$ . Pokud po nějakém z těchto kroků naopak na pásce nezůstane žádné písmeno  $a$ , slovo do jazyka  $L$  patří, protože  $n$  je dělitelné  $k$ .

Hledaný Turingův stroj rozhodující jazyk  $L$  bude pracovat v několika krocích:

1. Rozhodni, jestli vstupní slovo patří do jazyka  $\{b\}^+$ ,  $\{a\}^+\{b\}^+$ , nebo ani do jednoho z nich. Pokud patří do jazyka  $\{b\}^+$ , akceptuj, protože 0 je dělitelná libovolným kladným číslem. Pokud patří do jazyka  $\{a\}^+\{b\}^+$ , přesuň se na konec pásky a pokračuj krokem 2. Pokud nepatří ani do jednoho z nich, zamítni.
2. Jsou-li na pásce jen symboly  $A$  a  $B$ , akceptuj. Jinak zkus na pásce najít nejpravější výskyt znaku  $b$ . Pokud na pásce žádné písmeno  $b$  není, pokračuj krokem 4. Pokud ano, přepiš ho na  $B$  a pokračuj krokem 3.
3. Zkus na pásce najít nejpravější výskyt znaku  $a$ . Pokud na pásce žádné písmeno  $a$  není, zamítni. Pokud ano, přepiš ho na  $A$  a vrať se na krok 2.
4. Přepiš všechny znaky  $B$  na  $b$ , vrať se na pravý konec pásky a pokračuj krokem 2.

*Poznámka.* Korektnost tohoto algoritmu vyplývá z toho, že pro obsah pásky  $\triangleright y \sqcup^\omega$  vždy platí  $n = \#_A(y) + \#_a(y) \wedge k = \#_B(y) + \#_b(y)$  a při každém vstupu do kroku 2 platí invariant  $\#_A(y) \bmod k = \#_B(y) \bmod k$ .

Formálně se jedná o Turingův stroj  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \triangleright, \delta, \sqcup, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ , kde

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{checkB}}, q_{\text{ret}}, q_{\text{markA}}, q_{\text{markB}}, q_{\text{clearA}}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}, \\ \Sigma &= \{a, b\}, \\ \Gamma &= \{\triangleright, a, b, A, B, \sqcup\} \end{aligned}$$

a přechodová funkce  $\delta$  je určena následující tabulkou<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Držíme se konvence ze skript, kde symbol „–“ v tabulce vyjadřuje, že není podstatné, co se zapíše na uvedené místo (může to být cokoliv vyhovující definici).

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

	$\triangleright$	$a$	$b$	$A$	$B$	$\sqcup$
$q_0$	$(q_0, \triangleright, R)$	$(q_a, a, R)$	$(q_{\text{checkB}}, b, R)$	–	–	$(q_{\text{rej}}, -, -)$
$q_a$	–	$(q_a, a, R)$	$(q_b, b, R)$	–	–	$(q_{\text{rej}}, -, -)$
$q_b$	–	$(q_{\text{rej}}, -, -)$	$(q_b, b, R)$	–	–	$(q_{\text{markB}}, \sqcup, L)$
$q_{\text{checkB}}$	–	$(q_{\text{rej}}, -, -)$	$(q_{\text{checkB}}, b, R)$	–	–	$(q_{\text{acc}}, -, -)$
$q_{\text{markB}}$	$(q_{\text{acc}}, -, -)$	$(q_{\text{clearB}}, a, R)$	$(q_{\text{markA}}, B, L)$	$(q_{\text{markB}}, A, L)$	$(q_{\text{markB}}, B, L)$	–
$q_{\text{markA}}$	$(q_{\text{rej}}, -, -)$	$(q_{\text{ret}}, A, R)$	$(q_{\text{markA}}, b, L)$	$(q_{\text{markA}}, A, L)$	$(q_{\text{markA}}, B, L)$	–
$q_{\text{ret}}$	–	$(q_{\text{ret}}, a, R)$	$(q_{\text{ret}}, b, R)$	$(q_{\text{ret}}, A, R)$	$(q_{\text{ret}}, B, R)$	$(q_{\text{markB}}, \sqcup, L)$
$q_{\text{clearB}}$	–	–	–	$(q_{\text{clearB}}, A, R)$	$(q_{\text{clearB}}, b, R)$	$(q_{\text{markB}}, \sqcup, L)$

Ve výše uvedeném popisu odpovídají stavy  $q_0, q_a, q_b$  a  $q_{\text{checkB}}$  kroku 1, stav  $q_{\text{markB}}$  kroku 2, stav  $q_{\text{markA}}$  kroku 3 a stav  $q_{\text{clearB}}$  kroku 4. Stav  $q_{\text{checkB}}$  slouží na kontrolu, jestli slovo patří do jazyka  $\{b\}^+$ . Stav  $q_{\text{ret}}$  slouží na přesun čtecí hlavy na pravý konec pásky.