IB102 – úkol 9, příklad 2 – řešení   Odevzdání: 1. 12. 2014

Vypracoval(a):   UČO:
Skupina:

---

2. [2 body] Nechť $\Sigma = \{a, b\}$ je abeceda a $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte.

a) co$-L_1 \cup L_2^*$ není bezkontextový $\Rightarrow$ L_1 není deterministický bezkontextový nebo L_2 není bezkontextový

b) L_1 je bezkontextový a L_2 je rekursivně spočetný $\Rightarrow$ $L_1 \setminus L_2$ je rekursivně spočetný

c) L_1 je rekursivní $\Rightarrow$ $\{w \mid abba.w \in L_1\}$ je rekursivní

Pokud se rozhodnete podat konstruktivní důkaz, nemusíte uvádět technické detaily konstrukce (tedy nemusíte podrobně krok po kroku popisovat algoritmus transformace). Postačí popsat ideu tak, aby bylo dostatečně jasné, jak vaše konstrukce funguje. Nejste však zbaveni povinnosti se přesně a formálně vyjadřovat. Formulace, u nichž nebude jasná interpretace, nebudou uznávány.

---

a) Tvrzení **platí**. Dokážeme obměnou. Tedy podáme důkaz následujícího tvrzení: L_1 je deterministický bezkontextový jazyk a zároveň L_2 je bezkontextový jazyk $\Rightarrow$ co$-L_1 \cup L_2^*$ je bezkontextový jazyk.

   Platnost tohoto tvrzení plyne přímo z uzávěrových vlastností. Třída DCFL je uzavřená na doplněk, tedy je-li L_1 DCFL, pak je i co$-L_1$ DCFL (a tedy i CFL). Jazyk L_2 je CFL a z uzavřenosti bezkontextových jazyků na iteraci plyne, že i L_2^* je CFL. Sjednocením dvou bezkontextových jazyků dostáváme opět z uzávěrových vlastností bezkontextový jazyk, a tedy tvrzení platí.

b) Tvrzení **neplatí**. Vyvrátíme jej protipříkladem. Uvažme například jazyk $L_1 = \Sigma^*$ a $L_2 = HALT$. Pak L_1 je zřejmě bezkontextový jazyk a o L_2 bylo ukázáno na přednášce, že je rekursivně spočetný. Jejich rozdílem $L_1 \setminus L_2$ je jazyk co$-HALT$, o kterém bylo dokázáno, že není rekursivně spočetný. Implikace tedy neplatí.

c) Tvrzení **platí**. Podáme konstruktivní důkaz. Neboť je jazyk L_1 rekursivní, existuje úplný Turingův stroj $\mathcal{M}$, který jej akceptuje. Tohoto stroje využijeme ke konstrukci úplného Turingova stroje $\mathcal{M}'$ akceptujícího $\{w \mid abba.w \in L_1\}$.

   Stroj $\mathcal{M}'$ bude pracovat na libovolném vstupním slově u následovně:

   1) Doplň před slovo u řetězec $abba$.
   2) Simuluj Turingův stroj $\mathcal{M}$ na tomto slově (tedy na slově $abba.u$).
   3) Akceptuje-li $\mathcal{M}$, akceptuj. V případě, že $\mathcal{M}$ zamítá, zamítni také.

IB102 – úkol 9, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 1. 12. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Snadno se nahlédne, že $\mathcal{M}'$ akceptuje slovo u právě tehdy, když u náleží do jazyka $\{w \mid abba.w \in L_1\}$, tedy že $\{w \mid abba.w \in L_1\} = L(\mathcal{M}')$:

- $u \in \{w \mid abba.w \in L_1\} \Rightarrow abba.u \in L_1 \Rightarrow \mathcal{M}$ akceptuje $abba.u \Rightarrow \mathcal{M}'$ akceptuje $u \Rightarrow u \in L(M')$,
- $u \notin \{w \mid abba.w \in L_1\} \Rightarrow abba.u \notin L_1 \Rightarrow \mathcal{M}$ zamítá $abba.u \Rightarrow \mathcal{M}'$ zamítá $u \Rightarrow u \notin L(\mathcal{M}')$.

Doplnění slova *abba* před vstupní slovo u lze realizovat na úplném dvoupáskovém Turingově stroji. Na první pásce máme vstup u, na druhou pásku napíšeme řetězec *abba* a za něj zkopírujeme slovo u. Simulace stroje $\mathcal{M}$ na slově $abba.u$ skončí v konečném čase, neboť $\mathcal{M}$ je úplný. Výsledný stroj $\mathcal{M}'$ je tedy také úplný.

Neboť jsme sestrojili úplný Turingův stroj $\mathcal{M}'$ takový, že $L(\mathcal{M}') = \{w \mid abba.w \in L_1\}$, je jazyk $\{w \mid abba.w \in L_1\}$ rekursivní.