IB102 – úkol 10, příklad 1 – řešení   Odevzdání: 8. 12. 2014

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

1. [2 body] Dokažte, že problém určit, zda funkce popsaná zadaným Turingovým strojem $\mathcal{M}$ má v oboru hodnot řetězec „redukce", je nerozhodnutelný. Jinými slovy, dokažte, že jazyk

$$L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \text{existuje slovo } w \text{, pro které platí } \mathcal{M}(w) = \textit{redukce}\}$$

není rekurzivní.

Návod: Ukažte, že platí vztah HALT $\leq_m L$, a zdůvodněte, proč tudíž jazyk L nemůže být rekurzivní.

Důkaz. Ukážeme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce f, pro kterou platí:

$$w \in \text{HALT} \Leftrightarrow f(w) \in L$$

Z existence této funkce pak plyne, že HALT $\leq_m L$ a protože HALT není rekurzivní, nemůže být rekurzivní ani L.

Označme Σ abecedu jazyka HALT a Φ abecedu jazyka L. Potom definujeme funkci $f \colon \Sigma^* \to \Phi^*$ pro každé $w \in \Sigma^*$ následujícím předpisem.

$$f(w) = \begin{cases} \langle \mathcal{T}_{\text{inf}} \rangle, & \text{jestliže } w \text{ není kódem žádné dvojice skládající se z TS a slova,} \\ \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},u} \rangle, & \text{jestliže } w = \langle \mathcal{M}, u \rangle \text{ pro nějaký TS } \mathcal{M} \text{ a nějaké slovo } u, \end{cases}$$

kde $\mathcal{T}_{\text{inf}}$ je Turingův stroj, který cyklí nad každým vstupem a $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}$ je Turingův stroj, který nezávisle na vstupu simuluje výpočet $\mathcal{M}$ nad slovem u. Pokud simulace skončí (výpočet nad slovem u je konečný) $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}$ zapíše se na výstup slovo *redukce* a akceptuje. Chování $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}$ pro libovolný vstup v můžeme popsat následovně:

1. Smaž vstup v.
2. Zapiš na vstup u.
3. Simuluj Turingův stroj $\mathcal{M}$ se vstupem u.
4. Zapiš na výstup slovo *redukce*.
5. Akceptuj.

Konstrukci $\mathcal{T}_{\text{inf}}$ zvládneme jednoduše, jelikož pro nekorektní vstup w může funkce f vracet konstantu – TS který cyklí. Máme-li vstup tvaru $\langle \mathcal{M}, u \rangle$ pak pro něj dokážeme algoritmicky zkonstruovat $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}$, který provádí výše uvedený algoritmus, tedy podle Churchovy-Turingovy teze existuje Turingův stroj, který tento algoritmus realizuje, a tedy funkce f je totálně vyčíslitelná. Ukážeme, že funkce f je navíc redukce HALT na L, důkazem obou implikací v definici redukce.

„$\Rightarrow$": Předpokládejme nejprve, že platí $w \in$ HALT, potom jistě $w = \langle \mathcal{M}, u \rangle$ pro nějaký TS $\mathcal{M}$ a nějaké slovo u a navíc výpočet TS M nad slovem u je konečný. Pak podle definice platí $f(w) = \langle \mathcal{T}_{M,u} \rangle$. Výpočet $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}$ nad libovolným slovem v vrátí slovo *redukce*, protože v kroku 3 simulace skončí, v kroku 4 zapíše na výstup slovo *redukce* a následně v

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

kroku 5 slovo v akceptuje. Tedy existuje slovo x (dokonce to platí pro každé slovo), pro nějž platí $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}(x) = \textit{redukce}$ a tedy $f(w) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},u} \rangle \in L$.

„$\Leftarrow$“: Obměnou, předpokládáme tedy, že $w \notin$ HALT. Pak můžou nastat dva případy.

1. Slovo w není kódem žádné dvojice skládající se z Turingova stroje a slova: Pak $f(w) = \langle \mathcal{T}_{\text{inf}} \rangle$ a $f(w) \notin L$, protože stroj $\mathcal{T}_{\text{inf}}$ cyklí nad každým slovem a tedy nevrátí žádný výstup.

2. Platí $w = \langle \mathcal{M}, u \rangle$ pro nějaký TS $\mathcal{M}$ a nějaké slovo u a navíc výpočet TS $\mathcal{M}$ nad slovem u není konečný. Pak podle definice platí $f(w) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{M},u} \rangle$. Výpočet $\mathcal{T}_{\mathcal{M},u}$ nad každým slovem je pak nekonečný, protože v kroku 3 simulace cyklí. A tedy $f(w) \notin L$.

Nalezli jsme redukci $HALT \leq_m L$, a tedy jazyk L není rekursivní. $\square$