

Vypracoval(a):

UČO:

Skupina:

2. [2 body] Necht' Σ je libovolná abeceda a $L, R \subseteq \Sigma^*$ jsou libovolné jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte:

a) $L \subseteq R \implies L \leq_m R$

b) $L \leq_m \emptyset \iff L = \emptyset$

Tvrzení a) neplatí. Tedy není pravda, že libovolný jazyk lze vždy redukovat na jazyk, který je mu nadmnožinou.

Důkaz. Mějme $L = HALT$ a $R = \Sigma^*$, kde Σ je abeceda jazyka $HALT$. Předpoklad implikace zřejmě platí, jelikož jazyk $HALT$ je podmnožinou jazyka Σ^* . Závěr implikace však neplatí.

Z definice redukce dostáváme, že musí platit, že $w \notin HALT \implies f(w) \notin \Sigma^*$. To je však možné jedině pokud $HALT = \Sigma^*$. Je však zřejmé, že existuje slovo (označme jej x), které nepatří do jazyka $HALT$ (stačí vzít TS, který vždy cyklí (\mathcal{T}_{inf}) a libovolné slovo, například ε , pak jistě $x = \langle \mathcal{T}_{inf}, \varepsilon \rangle \notin HALT$). Pak má platit $f(x) \notin \Sigma^*$, což není možné. Implikace tedy neplatí pro žádnou funkci f a proto nelze sestrojít totálně vyčíslitelnou funkci takovou, že $w \in HALT \iff f(w) \in \Sigma^*$ a tedy $HALT$ se neredukuje na Σ^* . \square

Tvrzení b) platí. Tedy je pravda, že jediný jazyk, který lze redukovat na prázdný jazyk, je prázdný jazyk. Pozor ale, nic nám nevynucuje, že oba jazyky jsou nad stejnou abecedou, proto musíme uvažovat, že se abecedy mohou lišit.

Důkaz. Dokážeme zvlášť oba směry ekvivalence.

1. Směr $L = \emptyset \implies L \leq_m \emptyset$: Můžeme zvolit konstantní redukční funkci

$$f(w) = \varepsilon$$

Tedy funkci, která libovolné slovo z abecedy jazyka L zobrazí na prázdné slovo, to je jistě slovem nad libovolnou abecedou a jistě nepatří do \emptyset . Tato funkce je totálně vyčíslitelná a redukuje L na \emptyset , proto implikace platí.

2. Směr $L \leq_m \emptyset \implies L = \emptyset$ dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje L různý od \emptyset takový, že $L \leq_m \emptyset$. Pak ale existuje slovo $w \in L$, a tedy musí platit $f(w) \in \emptyset$, protože f je redukce. To však nemůže nastat. To je spor, a tudíž implikace $L \leq_m \emptyset \implies L = \emptyset$ musí platit.

Dokázali jsme obě implikace, čímž jsme dokázali $L \leq_m \emptyset \iff L = \emptyset$. \square