IB102 – úkol 11, příklad 1 – řešení **Odevzdání: 15. 12. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

1. [2 body] Dokažte, že problém rozhodnout, zda v daném orientovaném grafu existují alespoň 2 různé hamiltonovské cesty z vrcholu s do vrcholu t (lišící se alespoň jednou hranou), je NP-těžký. Jinak řečeno, dokažte, že jazyk 2-HAMPATH definovaný níže zadává NP-těžký problém.

$$\text{2-HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující alespoň 2 různé hamiltonovské cesty z } s \text{ do } t\}$$

V důkazu můžete využít faktu, že problém hamiltonovské cesty (definovaný níže) je NP-úplný:

$$\text{HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující hamiltonovskou cestu z } s \text{ do } t\}.$$

Bonus [1 bod] Dokažte, že problém 2-HAMPATH je dokonce NP-úplný. Tedy dokažte navíc, že 2-HAMPATH $\in \mathsf{NP}$.

Bonus [1 bod] Dokažte, že jazyk k-HAMPATH definovaný níže je NP-úplný pro libovolné $k \geq 1$:

$$k\text{-HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující alespoň } k \text{ různých hamiltonovských cest z } s \text{ do } t\}$$

Abychom ukázali, že problém 2-HAMPATH je NP-těžký, musíme dokázat, že všechny problémy ze složitostní třídy NP je možné na něj polynomiálně redukovat. Využijeme přitom faktu, že problém HAMPATH je NP-těžký, a najdeme redukci

$$\text{HAMPATH} \leq_p \text{2-HAMPATH}.$$

Potřebujeme tedy najít funkci f, totálně vyčíslitelnou v polynomiálním čase takovou, že

$$w \in \text{HAMPATH} \Leftrightarrow f(w) \in \text{2-HAMPATH}$$

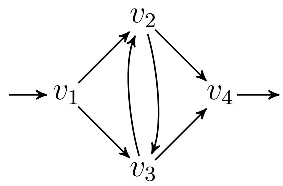
Intuice: Funkce f musí mít tu vlastnost, že kdybychom měli k dispozici TS rozhodující problém 2-HAMPATH a někdo by se nás zeptal, jestli graf G obsahuje hamiltonovskou cestu z s do t, my budeme umět vstup $w = \langle G, s, t\rangle$ přetransformovat funkcí f a následně na vstupu $f(w) = \langle G', s', t'\rangle$ spustit náš TS, který dotaz zodpoví. Musí platit, že když náš TS akceptuje (G' obsahuje alespoň 2 hamiltonovské cesty z s' do t'), tak původní graf G obsahoval hamiltonovskou cestu z s do t. Když náš stroj zamítne, původní graf G žádnou hamiltonovskou cestu neobsahoval.

Nechť tedy HAMPATH $\subseteq \Sigma^*$ a 2-HAMPATH $\subseteq \Phi^*$. Funkce $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$ je definována následovně:

$$f(w) = \begin{cases} \langle G_e, s', t'\rangle, & \text{jestliže } w \text{ není kódem žádné trojice popisující graf a jeho dva vrcholy,} \\ \langle G', s', t'\rangle, & \text{jestliže } w = \langle G, s, t\rangle \text{ pro nějaký graf } G \text{ a jeho dva vrcholy } s, t \end{cases}$$

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Kde G_e popisuje graf s vrcholy s' a t' neobsahující žádnou hranu. Zkontrolovat tvar vstupního slova jistě zvládneme v polynomiálním čase a zapsat na výstup kód $\langle G_e, s', t' \rangle$ nám zabere konstantní čas.
Graf G' vznikne z grafu G tak, že zvolíme libovolný vrchol v grafu G a „rozdělíme" jej na čtyři vrcholy v_1, v_2, v_3, v_4. Do vrcholu v_1 povedou všechny hrany, které vedly do původního vrcholu v. Obdobně z vrcholu v_4 povedou všechny hrany, které předtím vedly z vrcholu v. Dále přidáme hrany $v_1 \to v_2$, $v_1 \to v_3$, $v_2 \to v_4$, $v_3 \to v_4$, $v_2 \to v_3$, $v_3 \to v_2$. Jestliže $v \neq s$, $s' := s$, obdobně pro t. Jestliže $v = s$, pak $s' := v_1$, resp. jestliže $v = t$, pak $t' := v_4$.



Tuto modifikaci lze provést v polynomiálním (pro rozumné kódování grafu v lineárním) čase, tedy celkově platí, že funkce f má polynomiální složitost a je i totálně vyčíslitelná.

Zbývá ještě dokázat, že platí:

$$w \in \text{HAMPATH} \Leftrightarrow f(w) \in \text{2-HAMPATH}$$

„$\Rightarrow$": Předpokládejme, že $w = \langle G, s, t \rangle \in$ HAMPATH. G tedy obsahuje hamiltonovskou cestu z s do t. V našem modifikovaném grafu G' jsou úseky cesty z vrcholu s' po vrchol v_1 a z v_4 po vrchol t' stejné jako hamiltonovská cesta mezi vrcholy s, v a vrcholy v, t v původním grafu. Úsek cesty mezi vrcholy v_1 a v_4 však možno projít dvěma různými způsoby. Můžeme nejdříve navštívit vrchol v_2 nebo vrchol v_3 a v obou cestách pokrýt všechny vrcholy grafu G'. Nutně tedy platí, že graf G' obsahuje alespoň dvě hamiltonovské cesty z s' do t':

$$s' \to \ldots \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to \ldots \to t',$$
$$s' \to \ldots \to v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_4 \to \ldots \to t'$$

Tedy jistě platí: $f(w) = \langle G', s', t' \rangle \in$ 2-HAMPATH.

„$\Leftarrow$": Dokážeme obměnu implikace, tedy: $w \notin$ HAMPATH $\Rightarrow f(w) \notin$ 2-HAMPATH
Mohou nastat dva případy, proč $w \notin$ HAMPATH:

1. w nepopisuje trojici $\langle G, s, t \rangle$, kde G je graf a $s, t \in G$. Pak ale $f(w) = \langle G_e, s', t' \rangle$ určitě nemůže obsahovat dvě hamiltonovské cesty, protože vrcholy s' a t' mezi sebou nemají žádnou hranu.

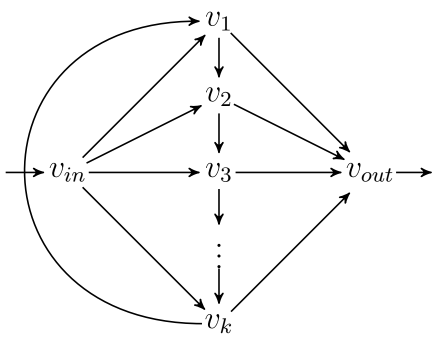
2. $w = \langle G, s, t \rangle$, ale mezi vrcholy s a t není hamiltonovská cesta. Popsanou transformací grafu však nemůže vzniknout ani jedna hamiltonovská cesta, natož dvě, protože modifikujeme jenom jeden vrchol a nepřidáváme tak žádné hrany mezi původními vrcholy grafu.

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Dokázali jsme tedy, že problém HAMPATH umíme zredukovat na problém 2-HAMPATH, z čehož plyne, že 2-HAMPATH je NP-těžký.

Bonus [1 bod] Abychom dokázali, že problém 2-HAMPATH je NP-úplný, musíme ukázat, že 2-HAMPATH $\in$ NP. Podobně jako v důkazu příslušnosti HAMPATH do třídy NP, i tady můžeme argumentovat tím, že obě cesty lze uhodnout v polynomiálním počtu kroků. V polynomiálním počtu kroku lze také zkontrolovat, že tyto dvě cesty jsou různé, tedy ověřit, že se liší alespoň v jedné hraně. Problém 2-HAMPATH tedy náleží do třídy NP a jelikož na něj umíme redukovat všechny problémy třídy NP, je také NP-úplný.

Bonus [1 bod] Důkaz, že jazyk k-HAMPATH je NP-těžký je velice podobný jako pro problém 2-HAMPATH. Místo transformace libovolného vrcholu v na čtyři jej však nahradíme $k+2$ vrcholy. Modifikace vypadá následovně:



Jestli původní graf G obsahoval hamiltonovskou cestu, graf G' bude obsahovat nejméně k hamiltonovských cest. Část cesty z s' po v_{in}, resp. z v_{out} po t', je stejná jako cesta v původním grafu z s do v, resp. z v do t. k různých cest mezi vrcholy v_{in} a v_{out} o délce $k+2$ vypadá následovně:

$$v_{in} \to v_i \to v_{i+1} \to \ldots \to v_k \to v_1 \to \ldots \to v_{i-1} \to v_{out}$$

V případě, že původní graf G žádnou hamiltonovsku cestu mezi vrcholy s a t neobsahoval, modifikací žádná nová hamiltonovská cesta mezi vrcholy s' a t' v grafu G' vzniknout nemohla (stejně jako u 2-HAMPATH), tedy $\langle G', s', t' \rangle \notin k$-HAMPATH.

Příslušnost do třídy NP je také zřejmá – uhodneme k hamiltonovských cest z s do t a následně ověříme, že žádné dvě cesty nejsou stejné. Vše zvládneme v polynomiálním počtu kroku vzhledem k velikosti grafu G. Problém k-HAMPATH je tedy i NP-úplný.