IB102 – úkol 11, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 15. 12. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

---

2. [2 body] Nechť L je libovolný jazyk nad libovolnou abecedou Σ. O následujících tvrzeních rozhodněte, zda jsou pravdivá, a svá rozhodnutí zdůvodněte:

a) $L \leq_p \text{TQBF} \implies L \in \mathsf{PSPACE}$

b) $\mathsf{NTIME}(5n^3) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^8)$

c) $\mathsf{coNP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$

d) $L \in \mathsf{SPACE}(2^n) \implies L \notin \mathsf{P}$

Bonus [1 bod] Dále rozhodněte platnost následujícího tvrzení a své rozhodnutí zdůvodněte:

$$L \leq_p \text{TQBF} \implies L \text{ je } \mathsf{PSPACE}\text{-úplný}$$

---

a) $L \leq_p \text{TQBF} \implies L \in \mathsf{PSPACE}$ platí.

Důkaz. TQBF je PSPACE-úplný, tedy libovolný jazyk, který se polynomiálně redukuje na TQBF, je ve třídě PSPACE. Konkrétně ukážeme, že pro libovolný problém, který se polynomiálně redukuje na PSPACE, dokážeme vytvořit Turingův stroj s polynomiální prostorovou složitostí.

Nechť $\mathcal{M}_f$ je Turingův stroj počítající polynomiální redukci f z L na TQBF a nechť $\mathcal{M}_{\text{TQBF}}$ je TS rozhodující TQBF s polynomiální prostorovou složitostí (takové stoje jistě existují z předpokladu implikace a z $\text{TQBF} \in \mathsf{PSPACE}$).

Vytvoříme Turingův stroj $\mathcal{M}_L$ rozhodující jazyk L ($L = L(\mathcal{M}_L)$) s polynomiální prostorovou složitostí takový, že nejprve redukuje svůj vstup pomocí f na odpovídající vstup pro TQBF a následně spustí stroj pro TQBF. Turingův stroj $\mathcal{M}_L$ bude pro libovolné $w \in \Sigma^*$ (kde Σ je abeceda jazyka L) pracovat takto:

1. spusť výpočet $\mathcal{M}_f$ nad vstupem w (tím získáme na pásce $f(w)$)
2. vrať se na začátek pásky
3. spusť nad páskou $\mathcal{M}_{\text{TQBF}}$ (a vrať jeho výsledek)

Tento stroj běží v deterministickém polynomiálním prostoru, protože:

- f je totálně vyčíslitelná v polynomiálním čase (vzhledem k $|w|$), a tedy nemůže popsat více než polynomiálně mnoho políček pásky a musí skončit
- $\mathcal{M}_{\text{TQBF}}$ běží v polynomiálním prostoru k délce $|f(w)|$

Tedy celkově dostáváme polynomiální složitost (pokud $\mathcal{O}(p_f(n))$ je časová složitost výpočtu f a $\mathcal{O}(p_{\text{TQBF}}(n))$ je prostorová složitost TQBF, pak prostorová složitost L je v $\mathcal{O}(p_{\text{TQBF}}(p_f(n)))$). □

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

b) $\mathsf{NTIME}(5n^3) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^8)$ platí.

Důkaz.

$$\mathsf{NTIME}(5n^3) = \mathsf{NTIME}(n^3) \subseteq \mathsf{NSPACE}(n^3) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^6) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^8)$$

Dokážeme zvlášť jednotlivé vztahy:

- $\mathsf{NTIME}(5n^3) = \mathsf{NTIME}(n^3)$ platí z toho, že třída NTIME je definována přes asymptotickou složitost, a že $5n^3 \in O(n^3)$,
- $\mathsf{NTIME}(n^3) \subseteq \mathsf{NSPACE}(n^3)$ platí, protože libovolný nedeterministický TS s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^3)$ může udělat nejvýše $\mathcal{O}(n^3)$ kroků, a tedy může použít nejvýše $\mathcal{O}(n^3)$ políček pásky,
- $\mathsf{NSPACE}(n^3) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^6)$ ze Savitchovy věty (přednáška 12, slide 22),
- $\mathsf{SPACE}(n^6) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^8)$ z asymptotické složitosti ($n^6 \in \mathcal{O}(n^8)$). $\square$

c) $\mathsf{coNP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$ platí.

Důkaz. Ukážeme, že platí ekvivalentní tvrzení:

$$L \in \mathsf{coNP} \implies L \in \mathsf{PSPACE}$$

Tedy, že libovolný jazyk, který je v coNP, je i v PSPACE. To dokážeme postupně s mezikroky:

$$\begin{aligned} L \in \mathsf{coNP} &\implies \text{co}-L \in \mathsf{NP} \implies \text{co}-L \in \mathsf{NPSPACE} \\ &\implies \text{co}-L \in \mathsf{PSPACE} \implies L \in \mathsf{PSPACE} \end{aligned}$$

Důkazy jednotlivých mezikroků:

- $L \in \mathsf{coNP} \implies \text{co}-L \in \mathsf{NP}$ z definice třídy $\mathsf{coNP} = \{\text{co}-L \mid L \in \mathsf{NP}\}$,
- $\text{co}-L \in \mathsf{NP} \implies \text{co}-L \in \mathsf{NPSPACE}$, opět ze vztahu mezi časovými a prostorovými třídami, podobně jako v části b).
- $\text{co}-L \in \mathsf{NPSPACE} \implies \text{co}-L \in \mathsf{PSPACE}$ ze Savitchovy věty, přímo uvedeno na přednášce 12, slide 24.
- $\text{co}-L \in \mathsf{PSPACE} \implies L \in \mathsf{PSPACE}$ z toho, že PSPACE je uzavřená na doplněk (u deterministických složitostních tříd stačí jen prohodit akceptující a zamítací stav). $\square$

d) $L \in \mathsf{SPACE}(2^n) \implies L \notin \mathsf{P}$ neplatí.

Důkaz. Jako protipříklad stačí uvést $L = \emptyset$, pak jistě $L \in \mathsf{SPACE}(2^n) \wedge L \in \mathsf{P}$, protože L lze rozpoznat v konstantním čase i prostoru pomocí TS, který vždy ihned přejde do zamítacího stavu. $\square$

IB102 – úkol 11, příklad 2 – řešení **Odevzdání: 15. 12. 2014**

Vypracoval(a): UČO:
Skupina:

Bonus: $L \leq_p \text{TQBF} \implies L$ je PSPACE-úplný neplatí.

Důkaz. Protipříkladem budiž $L = \emptyset$. Sestrojíme polynomiální redukci $\emptyset \leq_p \text{TQBF}$. Stačí aby redukční funkce f vracela konstantně kód libovolné nepravdivé kvantifikované formule, například:

$$f(w) = \langle \forall x (x \wedge \neg x) \rangle.$$

Tato funkce je jistě totálně vyčíslitelná v polynomiálním čase, protože se jedná o konstantní funkci.

Tedy předpoklad implikace platí, avšak závěr neplatí, $\emptyset$ není PSPACE-úplný problém. Pak by se na něj musel redukovat libovolný problém v PSPACE, což neplatí. To můžeme dokázat tak, že ukážeme

$$\text{TQBF} \not\leq_p \emptyset.$$

TQBF se neredukuje na na $\emptyset$, protože neexistuje funkce f taková, že

$$x \in \text{TQBF} \implies f(x) \in \emptyset,$$

a to z toho důvodu, že jistě existuje slovo, které patří do TQBF, ale žádné slovo nepatří do $\emptyset$. Tedy taková redukce neexistuje, a proto neplatí, že $\emptyset$ je PSPACE-úplný. $\square$