

# Minimální automat

Deterministický konečný automat  $\mathcal{M}$  s totální přechodovou funkcí nazveme **minimální konečný automat** pro jazyk  $L(\mathcal{M})$ , neexistuje-li ekvivalentní DFA s totální přechodovou funkcí a menším počtem stavů.

**Důsledek 2.31.** Minimální konečný automat akceptující regulární jazyk  $L$  je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů).

**Důkaz.** plyne přímo z Myhill-Nerodovy věty. □

# Konstrukce minimálního konečného automatu

**Definice 2.18.** Necht'  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  je DFA. Stav  $q \in Q$  nazveme **dosažitelný**, pokud existuje  $w \in \Sigma^*$  takové, že  $\hat{\delta}(q_0, w) = q$ . Stav je **nedosažitelný**, pokud není dosažitelný.

# Příklad

# Algoritmus pro eliminaci nedosažitelných stavů DFA

**Vstup:** Deterministický konečný automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

**Výstup:** Ekvivalentní automat  $\mathcal{M}'$  bez nedosažitelných stavů.

- 1:  $i := 0$
- 2:  $S_i := \{q_0\}$
- 3: **repeat**
- 4:      $S_{i+1} := S_i \cup \{q \mid \exists p \in S_i, a \in \Sigma : \delta(p, a) = q\}$
- 5:      $i := i + 1$
- 6: **until**  $S_i = S_{i-1}$
- 7:  $Q' := S_i$
- 8:  $\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta|_{Q' \times \Sigma}, q_0, F \cap Q')$

**Korektnost:** algoritmus je správný a konečný.

# Příklad

# Eliminace ekvivalentních stavů

Nechť  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  je DFA bez nedosažitelných stavů, jehož přechodová funkce je totální.

**Definice 2.32.** Stavy  $p, q$  nazveme **jazykově ekvivalentní**, psáno  $p \equiv q$ , pokud

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F).$$

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

**Definice 2.34. Reduktem** automatu  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  nazveme konečný automat  $\mathcal{M}/\equiv = (Q/\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/\equiv)$ , kde

- stavy jsou třídy rozkladu  $Q/\equiv$  (třída obsahující stav  $q$  je  $[q]$ ),
- přechodová funkce  $\eta$  je funkce splňující

$$\forall p, q \in Q, \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) = p \implies \eta([q], a) = [p],$$

- počáteční stav je třída rozkladu  $Q/\equiv$  obsahující stav  $q_0$ ,
- koncové stavy jsou právě ty třídy rozkladu  $Q/\equiv$ , které obsahují alespoň jeden koncový stav.

**Věta 2.37.** Necht'  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  je DFA bez nedosažitelných stavů s totální přechodovou funkcí. Pak  $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}/\equiv)$ .

# Algoritmus konstrukce minimálního automatu

**Definice 2.38.** Pro každé  $i \in \mathbb{N}_0$  definujeme binární relaci  $\equiv_i$  na  $Q$  předpisem

$$p \equiv_i q \iff \forall w \in \Sigma^* : (|w| \leq i \implies (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F))$$

- $p \equiv_i q \iff p$  a  $q$  nelze „rozlišit“ žádným slovem délky  $\leq i$
- $p \equiv q \iff p \equiv_i q$  pro každé  $i \in \mathbb{N}_0$ , tedy  $\equiv = \bigcap_{i=0}^{\infty} \equiv_i$
- 1.  $\equiv_0 = \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$   
2.  $\equiv_{i+1} = \{(p, q) \mid p \equiv_i q \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$



# Algoritmus konstrukce minimálního automatu

**Vstup:** Deterministický konečný automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.

**Výstup:** Redukt  $\mathcal{M}/\equiv$ .

- 1:  $i := 0$
- 2:  $\equiv_0 := \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
- 3: **repeat**
- 4:      $\equiv_{i+1} := \{(p, q) \mid p \equiv_i q \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$
- 5:      $i := i + 1$
- 6: **until**  $\equiv_i = \equiv_{i-1}$
- 7:  $\equiv := \equiv_i$
- 8:  $\mathcal{M}/\equiv := (Q/\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/\equiv)$

**Korektnost algoritmu:** důkaz vynechán.

# Intuice

# Příklad

	$\mathcal{M}$	$a$	$b$
$\rightarrow$	1	2	—
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	—
	7	6	1

	$\mathcal{M}'$	$a$	$b$
$\rightarrow$	1	2	$N$
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	$N$
	$N$	$N$	$N$

	$\equiv_0$	$a$	$b$
I	1	I	I
	2	II	I
	4	II	I
	$N$	I	I
II	3	II	II
	5	II	II
	6	I	I

# Příklad

	$\equiv_1$	$a$	$b$
I	1	II	I
	$N$	I	I
II	2	III	II
	4	III	II
III	3	IV	III
	5	IV	III
IV	6	II	I

	$\equiv_2$	$a$	$b$
I	1	III	II
II	$N$	II	II
III	2	IV	III
	4	IV	III
IV	3	V	IV
	5	V	IV
V	6	III	II

	$\mathcal{M}/\equiv$	$a$	$b$
	I	III	II
	II	II	II
	III	IV	III
←	IV	V	IV
←	V	III	II

# Kanonický tvar konečných automatů

## Motivace

$\mathcal{M}_1$	$a$	$c$	$b$
I	IV	III	I
→ II	V	III	III
← III	II	I	I
← IV	V	I	II
V	II	V	V

$\mathcal{M}_2$	$a$	$b$	$c$
→ I	III	V	V
II	IV	II	V
III	I	III	III
← IV	III	I	II
← V	I	II	II

# Kanonický tvar konečných automatů

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
I	IV	III	I
→ II	V	III	III
← III	II	I	I
← IV	V	I	II
V	II	V	V

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ A			
B			
C			
D			
E			

# Rozšíření konečných automatů I

## Nedeterministické konečné automaty

**Definice 2.42. Nedeterministický konečný automat (NFA) je**

$\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , kde význam všech složek je stejný jako v definici DFA s výjimkou přechodové funkce  $\delta$ . Ta je definována jako (totální) zobrazení  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ .

**Rozšířená přechodová funkce  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ :**

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, w)} \delta(p, a)$

**Jazyk** přijímaný nedeterministickým konečným automatem  $\mathcal{M}$  definujeme

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$



# Příklad

# Ekvivalence DFA a NFA

**Věta 2.43.** Pro každý NFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  existuje ekvivalentní deterministický konečný automat.

**Důkaz.** Definujeme DFA  $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$

- $Q' = 2^Q$ , tj. stavy automatu  $\mathcal{M}'$  jsou všechny podmnožiny  $Q$ .
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$ .
- Množina koncových stavů  $F'$  je tvořena právě těmi podmnožinami  $Q$ , které obsahují nějaký prvek množiny  $F$ .

# Korektnost

■  $\mathcal{M}'$  je deterministický konečný automat.

■  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{M}'$  jsou ekvivalentní:

indukcí k délce  $w \in \Sigma^*$  dokážeme  $\hat{\delta}(q_0, w) = \hat{\delta}'(\{q_0\}, w)$

**Základní krok  $|w| = 0$ :** Platí  $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta}'(\{q_0\}, \varepsilon)$ .

**Indukční krok:** Nechť  $w = va$ , pak

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, va) &= \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, v)} \delta(p, a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, v), a) \quad (\text{viz definice } \delta') \\ &= \delta'(\hat{\delta}'(\{q_0\}, v), a) \quad (\text{indukční předpoklad}) = \hat{\delta}'(\{q_0\}, va).\end{aligned}$$

Pak  $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$ , neboť

$$w \in L(\mathcal{M}) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff$$

$$\hat{\delta}'(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \iff \hat{\delta}'(\{q_0\}, w) \in F' \iff w \in L(\mathcal{M}'). \quad \square$$

# Algoritmus transformace NFA na ekvivalentní DFA

**Vstup:** Nedeterministický konečný automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

**Výstup:** Ekvivalentní DFA  $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$   
bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.

```
1:  $Q' := \{\{q_0\}\}; \delta' := \emptyset; F' := \emptyset; Done := \emptyset;$ 
2: while  $(Q' \setminus Done) \neq \emptyset$  do
3:    $M :=$  libovolný prvek množiny  $Q' \setminus Done$ 
4:   if  $M \cap F \neq \emptyset$  then  $F' := F' \cup \{M\}$  end if
5:   for all  $a \in \Sigma$  do
6:      $N := \bigcup_{p \in M} \delta(p, a)$ 
7:      $Q' := Q' \cup \{N\}$ 
8:      $\delta' := \delta' \cup \{((M, a), N)\}$ 
9:   end for
10:   $Done := Done \cup \{M\}$ 
11: end while
12:  $\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ 
```

# Důsledky determinizace konečných automatů

**Věta 2.44.** Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje NFA o  $n$  stavech takový, že ekvivalentní DFA má i po minimalizaci  $2^n$  stavů.

**Důkaz.** vynechán.

# Rozšíření konečných automatů II

## Automaty s $\varepsilon$ -kroky

**Definice 2.46.** **Nedeterministický konečný automat s  $\varepsilon$ -kroky** je  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , kde význam všech složek je stejný jako v definici NFA s výjimkou přechodové funkce  $\delta$ . Ta je definována jako totální zobrazení  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ .

### Rozšířená přechodová funkce

Definujeme funkci  $D_\varepsilon : Q \rightarrow 2^Q$  následujícím předpisem.

$D_\varepsilon(p)$  je nejmenší množina  $X \subseteq Q$  taková, že platí:

- $p \in X$ ,
- pokud  $q \in X$  a  $r \in \delta(q, \varepsilon)$ , pak také  $r \in X$ .

Rozšíření funkce  $D_\varepsilon$  na množiny stavů: pro  $Y \subseteq Q$  položíme

$$D_\varepsilon(Y) = \bigcup_{q \in Y} D_\varepsilon(q).$$

# Příklad - výpočet $D_\varepsilon$



Definice rozšířené přechodové funkce  $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = D_\varepsilon(q)$ ,
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q, w)} D_\varepsilon(\delta(p, a))$ .

**Lemma 2.47.** V přechodovém grafu automatu  $\mathcal{M}$  existuje cesta  $p_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} p_m \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} q_n$ , kde  $m, n \geq 1$ ,  $a \in \Sigma$ , právě když  $q_n \in \hat{\delta}(p_1, a)$ .

**Jazyk** přijímaný automatem  $\mathcal{M}$  s  $\varepsilon$ -kroky definujeme

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

# Příklad - výpočet rozšířené přechodové funkce pro automat s $\varepsilon$ -kroky

# Ekvivalence automatů s $\varepsilon$ -kroky a NFA

**Věta 2.48.** Ke každému NFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  s  $\varepsilon$ -kroky existuje ekvivalentní NFA (bez  $\varepsilon$ -kroků).

**Důkaz. Konstrukce**  $\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, G)$  bez  $\varepsilon$ -kroků:

$$\gamma(q, a) = \hat{\delta}(q, a) \text{ pro každé } q \in Q, a \in \Sigma$$

$$G = \begin{cases} F & \text{pokud } D_\varepsilon(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & \text{jinak} \end{cases}$$

**Korektnost:** Dokážeme, že pro libovolné  $p \in Q, w \in \Sigma^+$  platí  $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\gamma}(p, w)$  (indukcí vzhledem k délce slova  $w$ ).

**Algoritmus:**



# Uzavěrové vlastnosti regulárních jazyků

**Věta 2.49. a 2.51.** Třída regulárních jazyků je uzavřená na **sjednocení, průnik, rozdíl a komplement**.

**Důkaz.** synchronní paralelní kompozice automatů + komplement. □

**Příklad.**

$$L_1 = \{a^i b^j c^j \mid 2i \geq j \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$$

$$L_3 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_1 \cap L_2 = L_3$$

Jazyk  $L_2$  je regulární,  $L_3$  není regulární  $\implies L_1$  **není regulární**.

**Věta 2.52.** Třída regulárních jazyků je uzavřená na **zřetězení**.

**Důkaz.**

Nechť  $L_1$  a  $L_2$  jsou regulární jazyky, rozpoznávané NFA

$\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$  a  $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ , kde  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ .

Definujeme NFA s  $\varepsilon$ -kroky  $\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_1, F_2)$ , kde

$$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((p, \varepsilon), \{q_2\}) \mid p \in F_1\}.$$

**Korektnost:** Chceme dokázat  $L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2) = L(\mathcal{M}_1).L(\mathcal{M}_2)$

$\supseteq$ : Necht'  $u \in L(\mathcal{M}_1)$ , tedy  $\exists r \in F_1$  splňující  $r \in \hat{\delta}_1(q_1, u)$ .

Necht'  $v \in L(\mathcal{M}_2)$ , tedy  $\hat{\delta}_2(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$ . Pak

$$\hat{\delta}(q_1, uv) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_1, u)} \hat{\delta}(p, v) \supseteq \hat{\delta}(r, v) \supseteq \hat{\delta}(q_2, v) = \hat{\delta}_2(q_2, v).$$

Protože  $\hat{\delta}_2(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$ , tak  $\hat{\delta}(q_1, uv) \cap F_2 \neq \emptyset$ .  
Tedy  $uv \in L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2)$ .

$\subseteq$ :



**Věta 2.53.** Třída regulárních jazyků je uzavřená na **iteraci**.

**Důkaz.**

Nechť  $L$  je regulární jazyk akceptovaný NFA  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

Definujeme NFA s  $\varepsilon$ -kroky  $\mathcal{M}_* = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', p, \{p\})$ , kde  $p \notin Q$  a

$$\delta' = \delta \cup \{((p, \varepsilon), \{q_0\})\} \cup \{((q, \varepsilon), \{p\}) \mid q \in F\}.$$



# Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků - Shrnutí