

Rekurze

IB111 Úvod do programování skrze Python

2014

To iterate is human, to recurse divine. (L. Peter Deutsch)

- 5 pirátů si dělí poklad: 100 mincí
- nejstarší pirát navrhne rozdělení, následuje hlasování
- alespoň polovina hlasů \Rightarrow rozděleno, hotovo
- jinak \Rightarrow navrhuující pirát zabit, pokračuje druhý nejstarší (a tak dále)
- priority
 - 1 přežít
 - 2 mít co nejvíce mincí
 - 3 zabít co nejvíc ostatních pirátů
- (6 pirátů a 1 mince, 300 pirátů a 100 mincí)

- použití funkce při její vlastní definici
- volání sebe sama (s jinými parametry)

Rekurze a sebe-reference

Rekurze a sebe-reference – klíčové myšlenky v informatice

některé souvislosti:

- matematická indukce
- funkcionální programování
- rekurzivní datové struktury
- gramatiky
- logika, neúplnost
- nerozhodnutelnost, diagonalizace

Rekurze a úvodní programování

- uvedené aplikace rekurze a sebe-reference často poměrně náročné
- hodí se **pořádně** pochopit rekurzi na úrovni jednoduchých programů

Faktoriál

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n - 1) \cdot n$$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n = 1 \\ n \cdot f(n - 1) & \text{pokud } n > 1 \end{cases}$$

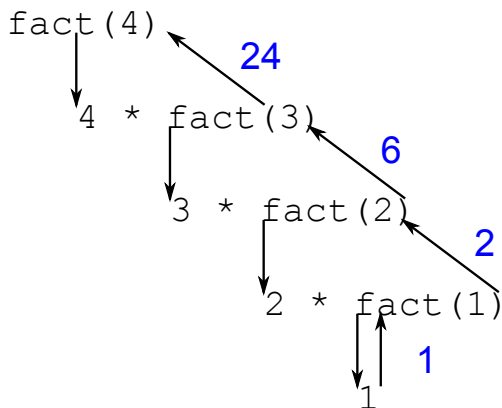
Faktoriál iterativně (pomocí cyklu)

```
def fact(n):  
    f = 1  
    for i in range(1,n+1):  
        f = f * i  
    return f
```


Faktoriál rekurzivně

```
def fact(n):  
    if n == 1: return 1  
    else: return n * fact(n-1)
```

Faktoriál rekurzivně – ilustrace výpočtu



Příklad: výpis čísel

Vymyslete funkci, která:

- vypíše čísla od 1 do N
- pomocí rekurze – bez použití cyklů `for`, `while`

Příklad: výpis čísel

Vymyslete funkci, která:

- vypíše čísla od 1 do N
- pomocí rekurze – bez použití cyklů `for`, `while`

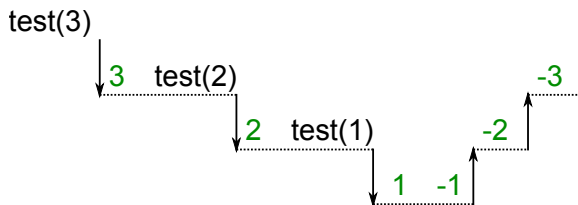
```
def vypis(n):  
    if n > 1:  
        vypis(n-1)  
    print n
```

Co udělá tento program?

```
def test(n):  
    print n  
    if n > 1:  
        test(n-1)  
    print -n
```

```
test(5)
```

Ilustrace zanořování

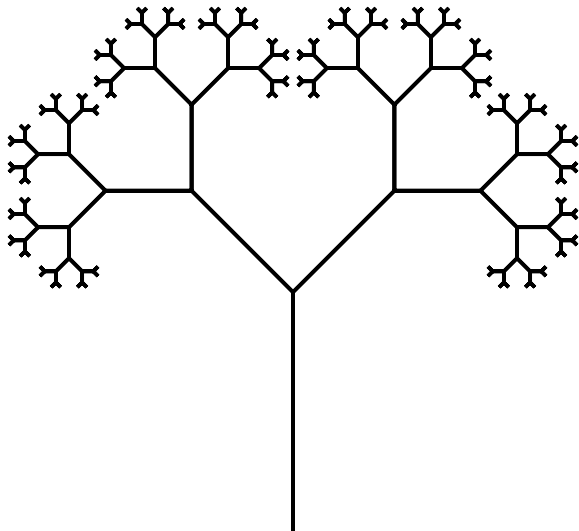


Nepřímá rekurze

```
def suda(n):  
    print "suda", n  
    licha(n-1)  
  
def licha(n):  
    print "licha", n  
    if n > 1:  
        suda(n-1)
```

```
suda(10)
```

Rekurzivní stroměček



nakreslit stromeček znamená:

- udělat stonek
- nakreslit dva menší stromečky (pootočené)

Stromeček želví grafikou

```
def stromecek(delka):  
    forward(delka)  
    if delka > 10:  
        left(45)  
        stromecek(0.6 * delka)  
        right(90)  
        stromecek(0.6 * delka)  
        left(45)  
    back(delka)
```

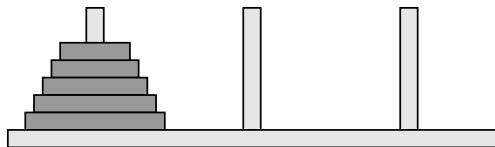
Podoby rekurze, odstranění rekurze

- koncová rekurze (tail recursion)
 - rekurzivní volání je poslední příkaz funkce
 - např. uvedená funkce pro faktoriál
 - lze vesměs přímočaře nahradit cyklem
- „plná“ rekurze
 - „zanořující se“ volání
 - např. stromeček
 - lze přepsat bez použití rekurze za použití zásobníku
 - rekurzivní podoba často výrazně elegantnější

Hanojské věže aneb O konci světa

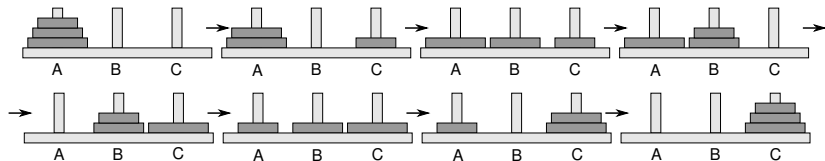
- video:
http://www.fi.muni.cz/~xpelane/IB111/hanojske_veze/
- klášter kdesi vysoko v horách u města Hanoj
- velká místnost se třemi vyznačenými místy
- 64 různě velkých zlatých disků
- podle věštby mají mniši přesouvat disky z prvního na třetí místo
- a až to dokončí ...

Hanojské věže: pravidla



- N disků různých velikostí naskládaných na sobě
- vždy může být jen menší disk položen na větším
- možnost přesunout jeden horní disk na jiný kolíček
- cíl: přesunout vše z prvního na třetí

Hanojské věže: řešení



Hanojské věže: výstup programu

```
>>> presun(3, "A", "B", "C")
```

```
A -> B
```

```
A -> C
```

```
B -> C
```

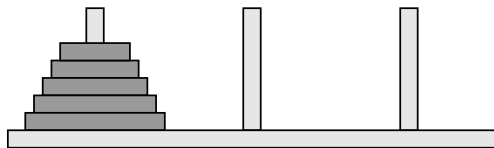
```
A -> B
```

```
C -> A
```

```
C -> B
```

```
A -> B
```

Hanojské věže: rekurzivní řešení



```
def presun(n, odkud, kam, kudy):  
    if n == 1:  
        print odkud, "->", kam  
    else:  
        presun(n-1, odkud, kudy, kam)  
        presun(1, odkud, kam, kudy)  
        presun(n-1, kudy, kam, odkud)
```


Řešení včetně vypisování stavu

```
*  
***  
*****  
-----
```

```
***  
***** *-----
```

```
***** *** *  
-----
```

```
 *  
***** ***  
-----
```

```
 *  
 *** *****  
-----
```

```
* *** *****  
-----
```

Stav úlohy, reprezentace

- stav úlohy = rozmístění disků na kolících
- disky na kolíku A \rightarrow seznam
- celkový stav:
 - 3 proměnné, v každé seznam – nepěkné
 - seznam seznamů
- příklad stavu (6 disků): $[[4], [5, 2, 1], [6, 3]]$

Řešení včetně vypisování stavu

```
def hanoi(n, odkud, kam, kudy, stav):  
    if n==1:  
        disk = stav[odkud].pop()  
        stav[kam].append(disk)  
        vypis_stav(stav)  
    else:  
        hanoi(n-1, odkud, kudy, kam, stav)  
        hanoi(1, odkud, kam, kudy, stav)  
        hanoi(n-1, kudy, kam, odkud, stav)  
  
def res_hanoi(n):  
    stav = [ range(n,0,-1), [], [] ]  
    vypis_stav(stav)  
    hanoi(n, 0, 2, 1, stav)
```

Vypisování stavu – jednoduše

```
def vypis_stav(stav):  
    print stav  
    print "--"
```

```
def vypis_stav(stav):  
    for i in range(3):  
        print "Kolik", chr(ord('A')+i), stav[i]  
    print "--"
```

Vypisování stavu – textová grafika

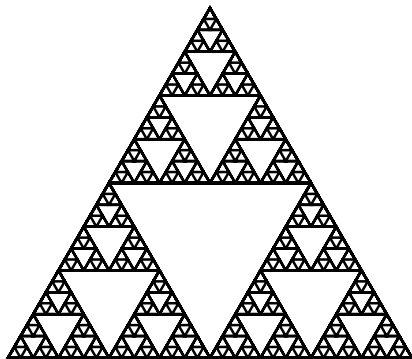
```
def vypis_stav(stav):
    n = sum([ len(s) for s in stav ])
    for y in range(n+1):
        radek = ""
        for kolik in range(3):
            for x in range(-n+1, n):
                if len(stav[kolik]) > n-y and\
                    abs(x) < stav[kolik][n-y]:
                    radek += "*"
                else:
                    radek += " "
            radek += "  "
        print radek
    print "-"*(n*6+1)
```

Sierpińského fraktál

rekurzivně definovaný geometrický útvar



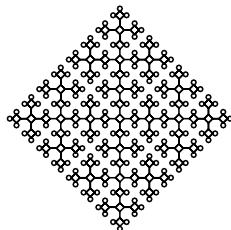
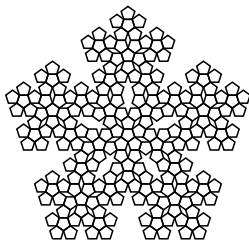
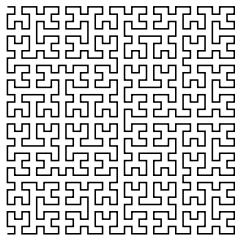
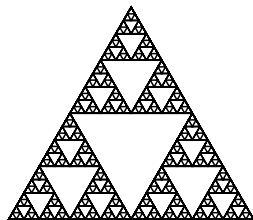
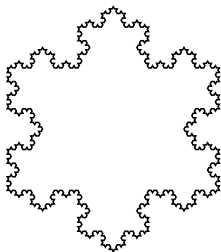
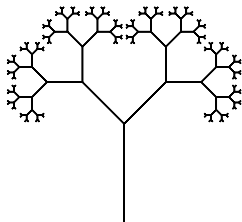
Sierpińského fraktál



Sierpińského fraktál: kód

```
def sierpinski(n, delka):  
    if n == 1:  
        trojuhelnik(delka)  
    else:  
        for i in range(3):  
            sierpinski(n - 1, delka)  
            forward((2 ** (n - 1)) * delka)  
            right(120)
```

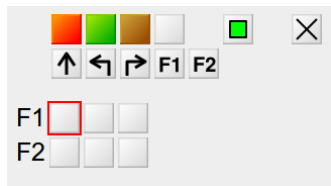

Další podobné fraktály



- `tutor.fi.muni.cz`, úloha Robotanik
- jednoduché „grafické“ programování robota
- těžší příklady založeny na rekurzi
- vizualizace průběhu „výpočtu“, zanořování a vynořování z rekurze

Robotanik – Kurz počítání

rekurze jako „paměť“



Strom kytek 2

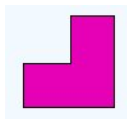
↑ ← → F1 F2 F3

F1 F2 F3

Rychlost animace:
1 2 3 4 5

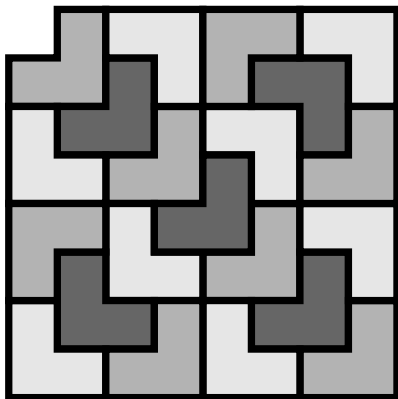
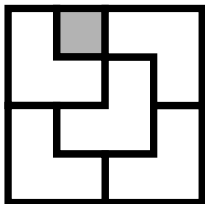
Zobrazit zásobník
 Klávesové zkratky
 Přesun více příkazů

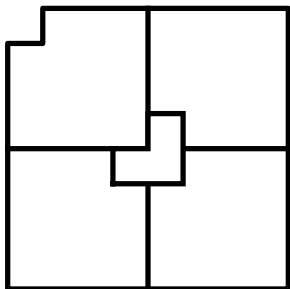
Pokrývání plochy L kostičkami



- mřížka 8×8 s chybějícím levým horním polem
- úkol: pokrýt zbývající políčka pomocí L kostiček
- rozšíření:
 - rozměr $2^n \times 2^n$
 - chybějící libovolné pole
 - obarvení 3 barvami, aby sousedi byli různí

Ukázky řešení





- rozdělit na čtvrtiny
- umístit jednu kostku
- rekurzivně aplikovat řešení na jednotlivé části

Příklady použití rekurze v informatice

- Euclidův algoritmus – NSD
- vyhledávání opakovaným půlením
- řadicí algoritmy (quicksort, mergesort)
- generování permutací, kombinací
- fraktály
- prohledávání grafu do hloubky
- gramatiky

Euklidův algoritmus rekurzivně

```
def nsd(a,b):  
    if b == 0:  
        return a  
    else:  
        return nsd(b, a % b)
```

Vyhledávání opakovaným půlením

- hra na 20 otázek
- hledání v seznamu
- hledání v binárním stromu

Vyhledávání: rekurzivní varianta

```
def binarni_vyhledavani(hodnota, seznam,
                        spodni_mez, horni_mez):
    if spodni_mez > horni_mez:
        return False
    stred = (spodni_mez + horni_mez)/2
    if seznam[stred] < hodnota:
        return binarni_vyhledavani(hodnota, seznam,
                                    stred+1, horni_mez)
    elif seznam[stred] > hodnota:
        return binarni_vyhledavani(hodnota, seznam,
                                    spodni_mez, stred-1)
    else:
        return True
```

- quicksort
 - vyber pivota
 - rozděl na menší a větší
 - zavolej quicksort na podčásti
- mergesort
 - rozděl na polovinu
 - každou polovinu seřaď pomocí mergesort
 - spoj obě poloviny

Generování permutací, kombinací

- permutace množiny = všechna možná pořadí
 - příklad: permutace množiny $\{1, 2, 3, 4\}$
 - jak je vypsát systematicky?
 - jak využít rekurzi?
- k -prvkové kombinace n -prvkové množiny = všechny možné výběry k prvků
 - příklad: 3-prvkové kombinace množiny $\{A, B, C, D, E\}$
 - jak je vypsát systematicky?
 - jak využít rekurzi?

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
def kombinace(seznam, k):  
    if k == 0: return [ [] ]  
    if len(seznam) < k: return []  
    vystup = [ ]  
    for komb in kombinace(seznam[1:], k-1):  
        komb.append(seznam[0])  
        vystup.append(komb)  
    vystup.extend(kombinace(seznam[1:], k))  
    return vystup
```

Nevhodné použití rekurze

- ne každé použití rekurze je efektivní
- Fibonacciho posloupnost (králíci):

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

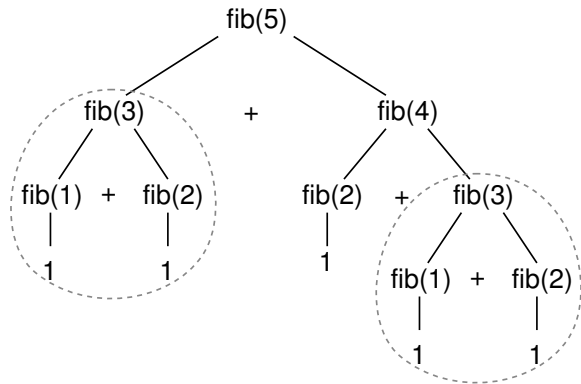
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
- **Vi Hart:** Doodling in Math: Spirals, Fibonacci, and Being a Plant

Fibonacciho posloupnost: rekurzivně

```
def fib(n):  
    if n <= 2: return 1  
    else: return fib(n-1) + fib(n-2)
```


Fibonacciho posloupnost: rekurzivní výpočet

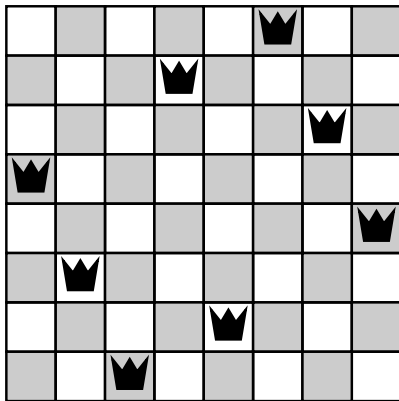
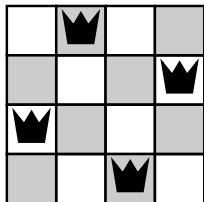


Problém N dam

- šachovnice $N \times N$
- rozestavit N dam tak, aby se vzájemně neohrožovaly
- zkuste pro $N = 4$

pozn. speciální případ „problému splnění podmínek“

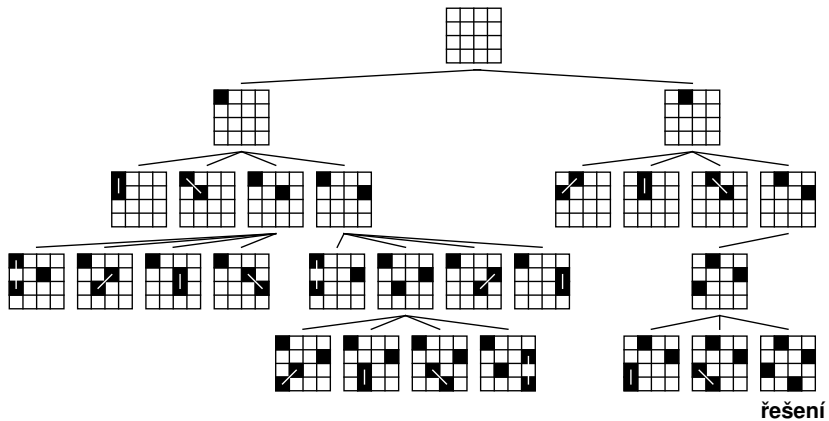
Problém N dam – řešení



Problém N dam – algoritmus

- ilustrace algoritmu backtracking
- hrubá síla, ale „chytře“
- začneme s prázdným plánem, systematicky zkoušíme umisťovat dámy
- pokud najdeme kolizi, vracíme se a zkoušíme jinou možnost
- přirozený rekurzivní zápis

Problém N dam – backtracking



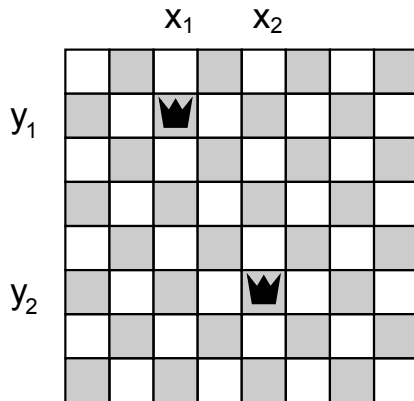
Problém N dam – reprezentace stavu

- pro každé pole si pamatujeme, zda na něm je/není dáma
 - dvourozměrný seznam True/False
- pro každou dámu si pamatujeme její souřadnice
 - seznam dvojic x_i, y_i
- pro každý řádek si pamatujeme, v kterém sloupci je dáma
 - seznam čísel (x_i)
 - nejvýhodnější reprezentace

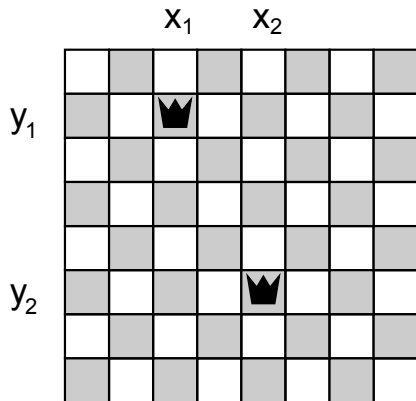
Problém N dam – řešení

```
def vyres_damy(n, stav):  
    if len(stav) == n:  
        vypis(stav)  
        return True  
    else:  
        for i in range(n):  
            stav.append(i)  
            if zkontroluj(stav):  
                if vyres_damy(n, stav): return True  
            stav.pop()  
    return False
```

Kdy se ohrožují dvě dámy?



Kdy se ohrožují dvě dámy?



$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Problém N dam – řešení

```
def vypis(stav):  
    for y in range(len(stav)):  
        for x in range(len(stav)):  
            if stav[y]==x: print "X",  
                else: print ".",  
        print  
    print  
  
def zkontroluj(stav):  
    for y1 in range(len(stav)):  
        x1 = stav[y1]  
        for y2 in range(y1+1, len(stav)):  
            x2 = stav[y2]  
            if x1 == x2 or x1-y1 == x2-y2 or x1+y1 == x2+y2:  
                return False  
    return True
```

Backtracking – další příklady použití

- mnoho logických úloh:
 - Sudoku a podobné úlohy
 - algebrogramy ($\text{SEND} + \text{MORE} = \text{MONEY}$)
- optimalizační problémy (např. rozvrhování, plánování)
- obecný „problém splnění podmínek“

- **rekurze**: využití **rekurze** pro definici sebe sama
- logické úlohy: Hanojské věže, L kostičky, dámy na šachovnici
- fraktály
- aplikace v programování: vyhledávání, řazení, prohledávání grafu
- klíčová myšlenka v informatice

nezapomeňte na piráty