Krivkový integrál

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Skalárne a vektorové funkcie

Definícia 1

Nech n, m sú prirodzené čísla. Zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva reálna m-vektorová funkcia n reálnych premenných. Každému n-rozmernému vektoru $x \in \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ sa priradí práve jeden m-rozmerný vektor

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m,$$

Funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sa nazývajú zložky vektorovej funkcie f.

Nech $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ je vektorová funkcia n premenných. Potom

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \cap \cdots \mathcal{D}(f_m).$$

Ak $m = n = 1$, funkcia f sa nazýva aj skalárne pole. V prípade $m = n \geq 2$ hovoríme o vektorovom poli. Limita a spojitosť vektorovej funkcie f sa definuje po jednotlivých jej zložkách f_i, t.j.,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \lim_{x \to x_0} f_2(x), \cdots, \lim_{x \to x_0} f_m(x) \right).$$

Pojem krivky v $\mathbb{R}^m$

Definícia 2

Nech m je prirodzené číslo a $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Krivkou v $\mathbb{R}^m$ rozumieme každú vektorovú funkciu $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$, ktorá je spojitá na $\mathcal{I}$. Množina

$$\langle\varphi\rangle := \varphi(\mathcal{I}) = \{\varphi(t),\ t \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

sa nazýva geometrický obraz (trajektória) krivky φ. Funkcia φ sa potom označuje ako parametrizácia množiny $\langle\varphi\rangle$. Ak $\mathcal{I} = [a, b]$ je kompaktný interval, potom $\varphi(a)$ je začiatočný bod a $\varphi(b)$ je koncový bod krivky.

Definícia 3

Krivka $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva

- jednoduchá, ak φ je prostá na $[a, b]$;
- uzavretá, ak $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- Jordanova, ak φ je prostá na $[a, b)$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$ (t.j., φ je jednoduchá a uzavretá krivka).

Veta 1 (Jordanova)

Nech φ *je Jordanova krivka v* $\mathbb{R}^2$. *Potom existujú dve súvislé oblasti* G_1 *a* G_2 *tak, že každý bod z* $\mathbb{R}^2 \setminus \langle\varphi\rangle$ *patrí práve do jednej z nich. Oblasti* G_1 *a* G_2 *sú teda disjunktné a platí* $G_1 \cup G_2 \cup \langle\varphi\rangle = \mathbb{R}^2$, *pričom trakejtória* $\langle\varphi\rangle$ *krivky* φ *je spoločná hranica množín* G_1 *a* G_2.

Poznamenajme, že práve jedna z oblastí G_1 a G_2 je ohraničená a nazýva sa vnútro krivky φ – $\operatorname{Int}\varphi$. Druhá, neohraničená oblasť sa potom označuje ako vonkajšok krivky φ – $\operatorname{Ext}\varphi$.

Príklad 1

Graf každej reálnej funkcie f jednej reálnej premennej t, ktorá je spojitá na nejakom intervale $\mathcal{I}$, je trajektóriou jednoduchej krivky v $\mathbb{R}^2$. Zobrazenie φ

$$\mathcal{I} \ni t \longmapsto \varphi(t) = (t,\, f(t)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

je totiž spojité a prosté na intervale $\mathcal{I}$, a je teda jednoduchou krivkou v $\mathbb{R}^2$.

Príklad 2

Kružnica

$$x = 3 + 2\cos t, \quad y = 2 + 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je jednoduchá a uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$, teda Jordanova krivka. Rovnice

$$x = 3 + 2\cos t, \quad y = 2 + 2\sin t, \quad t \in [0, 3\pi],$$

určujú trajektóriu krivky, ktorá nie je ani jednoduchá, ani uzavretá. Rovnice

$$x = 3 + 2\cos 2t, \quad y = 2 + 2\sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

popisujú krivku v $\mathbb{R}^2$, ktorá je uzavretá, ale nie je jednoduchá.

Príklad 3

Bernoulliho lemniskáta

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}, \quad y = \frac{a\sqrt{2}\cos t \sin t}{1+\sin^2 t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0,$$

je uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$, ale nie jednoduchá.

Príklad 4

Cykloida

$$x = rt - d\sin t, \quad y = r - d\cos t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad r, d > 0,$$

nie je uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$. Obyčajná cykloida ($r = d$) a skrátená cykloida ($r > d$) sú jednoduché krivky, kým predĺžená cykloida ($r < d$) nie je jednoduchá krivka.

Definícia 4 (Transformácia parametra)

Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ a $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ sú krivky. Povieme, že φ a ψ sú ekvivalentné a píšeme $\varphi \sim \psi$, ak existuje spojito diferencovateľné zobrazenie $w : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ také, že $w'(t) \neq 0$ pre každé $t \in [\alpha,\beta]$ a platí

$$\varphi(w(t)) = \psi(t) \quad \text{pre každé } t \in [\alpha,\beta].$$

Pre funkciu w z Definície 4 platí že derivácia $w'(t)$ nemení znamienko na $[\alpha,\beta]$, a teda w je buď rastúca alebo klesajúca na $[\alpha,\beta]$. Preto funkcia w je prostá a jej inverzia w^{-1} je tiež spojito diferencovateľná na $[\alpha,\beta]$. Relácia $\sim$ je teda skutočne ekvivalencia a platí $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, t.j., zachováva trajektórie kriviek. Definícia 4 potom vyjadruje transformáciu parametrizácie množiny φ.

Príklad 5

Uvažujme krivky φ a ψ dané

$$\varphi : x = t, \quad y = t, \quad t \in (0,1),$$
$$\psi : x = t^3, \quad y = t^3, \quad t \in (0,1).$$

Trajektóriou oboch kriviek je otvorená úsečka spájajúca body $[0,0]$ a $[1,1]$. Krivky φ a ψ sú ekvivalentné s funkciou $w : (0,1) \to (0,1)$ tvaru $w(t) = t^3$.

Definícia 5

Nech $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ a $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ sú krivky spĺňajúce $\varphi(b) = \psi(\alpha)$. Súčtom kriviek φ a ψ rozumieme krivku $\varphi \oplus \psi$ danú

$$(\varphi \oplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b] \\ \psi(t + \alpha - b), & t \in [b, b + \beta - \alpha]. \end{cases} \tag{1}$$

Opačnou krivkou ku krivke φ rozumieme krivku $\ominus\varphi$ danú

$$(\ominus\varphi)(t) := \varphi(-t), \quad t \in [-b, -a]. \tag{2}$$

Z Definície 5 priamo vyplýva $\langle \ominus\varphi \rangle = \langle \varphi \rangle$ a $\langle \varphi \oplus \psi \rangle = \langle \varphi \rangle \cup \langle \psi \rangle$. Operácia $\oplus$ je asociatívna, t.j., pre každé tri krivky φ, ψ a ω v $\mathbb{R}^m$ platí

$$(\varphi \oplus \psi) \oplus \omega = \varphi \oplus (\psi \oplus \omega),$$

ak aspoň jedna strana rovnosti má zmysel. Rozdiel kriviek φ a ω definujeme

$$\varphi \ominus \psi := \varphi \oplus (\ominus\psi), \tag{3}$$

ak súčet $\varphi \oplus (\ominus\psi)$ je definovaný, t.j., platí $\varphi(b) = \psi(\beta)$.

Nech $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ je krivka v $\mathbb{R}^m$ definovaná na kompaktnom intervale $[a, b]$. Deriváciou krivky φ v bode $t \in [a, b]$ rozumieme vektor

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \cdots, \varphi_m'(t)), \tag{4}$$

pričom pre $t = a$, resp. $t = b$ uvažujeme príslušné jednostranné derivácie funkcií φ_i, t.j.,

$$\varphi'(a) = \left((\varphi_1)'_+(a), \cdots, (\varphi_m)'_+(a)\right), \quad \varphi'(b) = \left((\varphi_1)'_-(b), \cdots, (\varphi_m)'_-(b)\right).$$

Ak $\varphi'(t) \neq 0$, vektor $\varphi'(t)$ sa nazýva dotykový vektor ku krivke φ v bode t a vektor $\tau(t) := \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ je jednotkový dotykový vektor. Pripomeňme, že

$$\|\varphi'(t)\| := \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}$$

je (euklidovská) norma, resp. veľkosť vektora $\varphi'(t)$. Priamka definovaná

$$\{\varphi(t) + h\varphi'(t), \quad h \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

sa označuje ako dotyčnica krivky φ v bode t. Dotyčnica sa zo všetkých priamok prechádzajúcich cez bod $\varphi(t)$ najviac primkýna ku trajektórii krivky φ.

Definícia 6

Krivka $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva hladká, ak vektorová funkcia φ je spojito diferencovateľná na $[a, b]$ a $\varphi'(t) \neq 0$ pre každé $t \in [a, b]$. V prípade uzavretej hladkej krivky naviac požadujeme $\varphi'(a) = \varphi'(b)$. Krivka φ sa označuje ako po častiach hladká, ak existuje konečné delenie

$$D : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

intervalu $[a, b]$ také, že krivka $\varphi|_{[t_{k-1}, t_k]}$ je hladká pre každé $k = 1, \ldots, n$.

V prípade po častiach hladkej krivky φ teda existuje najviac konečne veľa izolovaných bodov t, v ktorých $\varphi'(t)$ neexistuje. Jednoduchá hladká krivka sa nazýva oblúk (príp. hladký oblúk). Ak v Definícii 6 vynecháme podmienku nenulovosti derivácie φ' na intervale $[a, b]$, dostaneme tzv. regulárnu, resp. po častiach regulárnu krivku. Po častiach regulárna krivka sa nazýva aj cesta.

Príklad 6

Kružnica alebo elipsa sú jednoduché hladké krivky (Jordanove hladké krivky). Obvod štvorca alebo obdĺžnika je jednoduchá po častiach hladká krivka.

Príklad 7

Asteroida

$$\varphi(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t), \quad a > 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

je príkladom jednoduchej uzavretej regulárnej krivky (Jordanova regulárna krivka). Nie je však hladkou krivkou, nakoľko derivácia

$$\varphi'(t) = (-3a\cos^2 t \sin t,\, 3a\sin^2 t \cos t)$$

má nulovú hodnotu v bodoch $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$. Podľa Definície 6 nie je ani po častiach hladkou krivkou. Ako ukážeme neskôr, vhodnou transformáciou parametra získame krivku, ktorá má rovnakú trajektóriu a je po častiach hladká.

Orientácia krivky

Nech φ je krivka v $\mathbb{R}^m$ definovaná na intervale $\mathcal{I}$. Stanoviť orientáciu krivky φ znamená zvoliť nejaké usporiadanie na množine $\langle\varphi\rangle$, t.j., chceme určiť, ktorým smerom sa pohybujeme po trajektórii krivky. Ak pre každú dvojicu $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ s $t_1 < t_2$ platí, že bod $\varphi(t_1)$ je pred bodom $\varphi(t_2)$ v danom usporiadaní (pohybom po $\langle\varphi\rangle$ prechádzame najprv bodom $\varphi(t_1)$ a až potom bodom $\varphi(t_2)$), t.j.,

$$\varphi(t_1) \prec \varphi(t_2) \iff t_1 < t_2, \tag{6}$$

potom krivka φ je orientovaná súhlasne s parametrizáciou. V prípade, ak

$$\varphi(t_2) \prec \varphi(t_1) \iff t_1 < t_2, \tag{7}$$

krivka φ je orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou. Krivka s usporiadaním $\prec$ sa označuje ako orientovaná krivka. V prípade kompaktného intervalu $\mathcal{I} = [a, b]$ a orientovanej krivky φ je možné jeden z krajných bodov $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ vyhlásiť za začiatočný bod a druhý za koncový bod krivky φ. Opačná krivka má opačnú orientáciu. Orientácia Jordanovej krivky je zadaná smerom dotykového vektora v jednom bode krivky. Potom Jordanova krivka je kladne orientovaná, ak je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek. V opačnom prípade hovoríme o záporne orientovanej Jordanovej krivke.