

# Křivkový integrál

Peter Šepitka

podzim 2014

# Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu

# Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu

# Skalárne a vektorové funkcie

## Definícia 1

Nech  $n, m$  sú prirodzené čísla. Zobrazenie  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa nazýva **reálna  $m$ -vektorová funkcia  $n$  reálnych premenných**. Každému  $n$ -rozmernému vektoru  $x \in \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$  sa priradí práve jeden  $m$ -rozmerný vektor

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m,$$

Funkcie  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sa nazývajú **zložky** vektorovej funkcie  $f$ .

Nech  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  je vektorová funkcia  $n$  premenných. Potom

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \cap \dots \cap \mathcal{D}(f_m).$$

Ak  $m = n = 1$ , funkcia  $f$  sa nazýva aj **skalárne pole**. V prípade  $m = n \geq 2$  hovoríme o **vektorovom poli**. Limita a spojitosť vektorovej funkcie  $f$  sa definuje po jednotlivých jej zložkách  $f_i$ , t.j.,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \right).$$

# Pojem krivky v $\mathbb{R}^m$

## Definícia 2

Nech  $m$  je prirodzené číslo a  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  je interval. **Krivkou** v  $\mathbb{R}^m$  rozumieme každú vektorovú funkciu  $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , ktorá je spojitá na  $\mathcal{I}$ . Množina

$$\langle \varphi \rangle := \varphi(\mathcal{I}) = \{\varphi(t), t \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

sa nazýva **geometrický obraz (trajektória) krivky**  $\varphi$ . Funkcia  $\varphi$  sa potom označuje ako **parametrizácia množiny**  $\langle \varphi \rangle$ . Ak  $\mathcal{I} = [a, b]$  je kompaktný interval, potom  $\varphi(a)$  je **začiatkový bod** a  $\varphi(b)$  je **koncový bod** krivky.

## Definícia 3

Krivka  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa nazýva

- **jednoduchá**, ak  $\varphi$  je prostá na  $[a, b]$ ;
- **uzavretá**, ak  $\varphi(a) = \varphi(b)$ ;
- **Jordanova**, ak  $\varphi$  je prostá na  $[a, b)$  a  $\varphi(a) = \varphi(b)$  (t.j.,  $\varphi$  je jednoduchá a uzavretá krivka).

### Veta 1 (Jordanova)

*Nech  $\varphi$  je Jordanova krivka v  $\mathbb{R}^2$ . Potom existujú dve súvislé oblasti  $G_1$  a  $G_2$  tak, že každý bod z  $\mathbb{R}^2 \setminus \langle \varphi \rangle$  patrí práve do jednej z nich. Oblasti  $G_1$  a  $G_2$  sú teda disjunktné a platí  $G_1 \cup G_2 \cup \langle \varphi \rangle = \mathbb{R}^2$ , pričom trakejtória  $\langle \varphi \rangle$  krivky  $\varphi$  je spoločná hranica množín  $G_1$  a  $G_2$ .*

Poznamenajme, že práve jedna z oblastí  $G_1$  a  $G_2$  je ohraničená a nazýva sa **vnútro krivky  $\varphi$**  –  $\text{Int } \varphi$ . Druhá, neohraničená oblasť sa potom označuje ako **vonkajšok krivky  $\varphi$**  –  $\text{Ext } \varphi$ .

## Príklad 1

Graf každej reálnej funkcie  $f$  jednej reálnej premennej  $t$ , ktorá je spojitá na nejakom intervale  $\mathcal{I}$ , je trajektóriou jednoduchej krivky v  $\mathbb{R}^2$ . Zobrazenie  $\varphi$

$$\mathcal{I} \ni t \mapsto \varphi(t) = (t, f(t)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

je totiž spojité a prosté na intervale  $\mathcal{I}$ , a je teda jednoduchou krivkou v  $\mathbb{R}^2$ .

## Príklad 2

Kružnica

$$x = 3 + 2 \cos t, \quad y = 2 + 2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je jednoduchá a uzavretá krivka v  $\mathbb{R}^2$ , teda Jordanova krivka. Rovnice

$$x = 3 + 2 \cos t, \quad y = 2 + 2 \sin t, \quad t \in [0, 3\pi],$$

určujú trajektóriu krivky, ktorá nie je ani jednoduchá, ani uzavretá. Rovnice

$$x = 3 + 2 \cos 2t, \quad y = 2 + 2 \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

popisujú krivku v  $\mathbb{R}^2$ , ktorá je uzavretá, ale nie je jednoduchá.

### Príklad 3

Bernoulliho lemniskáta

$$x = \frac{a\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y = \frac{a\sqrt{2} \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0,$$

je uzavretá krivka v  $\mathbb{R}^2$ , ale nie jednoduchá.

### Príklad 4

Cykloida

$$x = rt - d \sin t, \quad y = r - d \cos t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad r, d > 0,$$

nie je uzavretá krivka v  $\mathbb{R}^2$ . Obyčajná cykloida ( $r = d$ ) a skrátaná cykloida ( $r > d$ ) sú jednoduché krivky, kým predĺžená cykloida ( $r < d$ ) nie je jednoduchá krivka.



### Definícia 4 (Transformácia parametra)

Nech  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  a  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sú krivky. Povieme, že  $\varphi$  a  $\psi$  sú **ekvivalentné** a píšeme  $\varphi \sim \psi$ , ak existuje spojito diferencovateľné zobrazenie  $w : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  také, že  $w'(t) \neq 0$  pre každé  $t \in [\alpha, \beta]$  a platí

$$\varphi(w(t)) = \psi(t) \quad \text{pre každé } t \in [\alpha, \beta].$$

Pre funkciu  $w$  z Definície 4 platí že derivácia  $w'(t)$  nemení znamienko na  $[\alpha, \beta]$ , a teda  $w$  je buď rastúca alebo klesajúca na  $[\alpha, \beta]$ . Preto funkcia  $w$  je prostá a jej inverzia  $w^{-1}$  je tiež spojito diferencovateľná na  $[\alpha, \beta]$ . Relácia  $\sim$  je teda skutočne ekvivalencia a platí  $\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$ , t.j., zachováva trajektórie kriviek. Definícia 4 potom vyjadruje transformáciu parametrizácie množiny  $\varphi$ .

### Príklad 5

Uvažujme krivky  $\varphi$  a  $\psi$  dané

$$\varphi : x = t, \quad y = t, \quad t \in (0, 1),$$

$$\psi : x = t^3, \quad y = t^3, \quad t \in (0, 1).$$

Trajektóriou oboch kriviek je otvorená úsečka spájajúca body  $[0, 0]$  a  $[1, 1]$ . Krivky  $\varphi$  a  $\psi$  sú ekvivalentné s funkciou  $w : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  tvaru  $w(t) = t^3$ .

### Definícia 5

Nech  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  a  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sú krivky spĺňajúce  $\varphi(b) = \psi(\alpha)$ .

**Súčtom kriviek**  $\varphi$  a  $\psi$  rozumieme krivku  $\varphi \oplus \psi$  danú

$$(\varphi \oplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b] \\ \psi(t + \alpha - b), & t \in [b, b + \beta - \alpha]. \end{cases} \quad (1)$$

**Opačnou krivkou** ku krivke  $\varphi$  rozumieme krivku  $\ominus \varphi$  danú

$$(\ominus \varphi)(t) := \varphi(-t), \quad t \in [-b, -a]. \quad (2)$$

Z Definície 5 priamo vyplýva  $\langle \ominus \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle$  a  $\langle \varphi \oplus \psi \rangle = \langle \varphi \rangle \cup \langle \psi \rangle$ . Operácia  $\oplus$  je asociatívna, t.j., pre každé tri krivky  $\varphi$ ,  $\psi$  a  $\omega$  v  $\mathbb{R}^m$  platí

$$(\varphi \oplus \psi) \oplus \omega = \varphi \oplus (\psi \oplus \omega),$$

ak aspoň jedna strana rovnosti má zmysel. **Rozdiel kriviek**  $\varphi$  a  $\omega$  definujeme

$$\varphi \ominus \psi := \varphi \oplus (\ominus \psi), \quad (3)$$

ak súčet  $\varphi \oplus (\ominus \psi)$  je definovaný, t.j., platí  $\varphi(b) = \psi(\beta)$ .

Nech  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$  je krivka v  $\mathbb{R}^m$  definovaná na kompaktnom intervale  $[a, b]$ . **Deriváciou krivky**  $\varphi$  v bode  $t \in [a, b]$  rozumieme vektor

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_m'(t)), \quad (4)$$

pričom pre  $t = a$ , resp.  $t = b$  uvažujeme príslušné jednostranné derivácie funkcií  $\varphi_i$ , t.j.,

$$\varphi'(a) = ((\varphi_1)'_+(a), \dots, (\varphi_m)'_+(a)), \quad \varphi'(b) = ((\varphi_1)'_-(b), \dots, (\varphi_m)'_-(b)).$$

Ak  $\varphi'(t) \neq 0$ , vektor  $\varphi'(t)$  sa nazýva **dotykový vektor** ku krivke  $\varphi$  v bode  $t$  a vektor  $\tau(t) := \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$  je **jednotkový dotykový vektor**. Pripomeňme, že

$$\|\varphi'(t)\| := \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_m'(t))^2}$$

je (euklidovská) norma, resp. veľkosť vektora  $\varphi'(t)$ . Priamka definovaná

$$\{\varphi(t) + h\varphi'(t), \quad h \in \mathbb{R}\} \quad (5)$$

sa označuje ako **dotyčnica krivky**  $\varphi$  v bode  $t$ . Dotyčnica sa zo všetkých priamok prechádzajúcich cez bod  $\varphi(t)$  najviac primkýna ku trajektórii krivky  $\varphi$ .

## Definícia 6

Krivka  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sa nazýva **hladká**, ak vektorová funkcia  $\varphi$  je spojitou diferencovateľná na  $[a, b]$  a  $\varphi'(t) \neq 0$  pre každé  $t \in [a, b]$ . V prípade uzavretej hladkej krivky navyše požadujeme  $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ . Krivka  $\varphi$  sa označuje ako **po častiach hladká**, ak existuje konečné delenie

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu  $[a, b]$  také, že krivka  $\varphi|_{[t_{k-1}, t_k]}$  je hladká pre každé  $k = 1, \dots, n$ .

V prípade po častiach hladkej krivky  $\varphi$  teda existuje najviac konečne veľa izolovaných bodov  $t$ , v ktorých  $\varphi'(t)$  neexistuje. Jednoduchá hladká krivka sa nazýva **oblúk** (príp. **hladký oblúk**). Ak v Definícii 6 vynecháme podmienku nenulovosti derivácie  $\varphi'$  na intervale  $[a, b]$ , dostaneme tzv. **regulárnu**, resp. **po častiach regulárnu krivku**. Po častiach regulárna krivka sa nazýva aj **cesta**.

### Príklad 6

Kružnica alebo elipsa sú jednoduché hladké krivky (Jordanove hladké krivky).  
Obvod štvorca alebo obdĺžnika je jednoduchá po častiach hladká krivka.

### Príklad 7

Asteroida

$$\varphi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad a > 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

je príkladom jednoduchej uzavretej regulárnej krivky (Jordanova regulárna krivka). Nie je však hladkou krivkou, nakoľko derivácia

$$\varphi'(t) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$$

má nulovú hodnotu v bodoch  $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ . Podľa Definície 6 nie je ani po častiach hladkou krivkou. Ako ukážeme neskôr, vhodnou transformáciou parametra získame krivku, ktorá má rovnakú trajektóriu a je po častiach hladká.

# Orientácia krivky

Nech  $\varphi$  je krivka v  $\mathbb{R}^m$  definovaná na intervale  $\mathcal{I}$ . Stanoviť orientáciu krivky  $\varphi$  znamená zvoliť nejaké usporiadanie na množine  $\langle \varphi \rangle$ , t.j., chceme určiť, ktorým smerom sa pohybujeme po trajektórii krivky. Ak pre každú dvojicu  $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$  s  $t_1 < t_2$  platí, že bod  $\varphi(t_1)$  je pred bodom  $\varphi(t_2)$  v danom usporiadaní (pohybom po  $\langle \varphi \rangle$  prechádzame najprv bodom  $\varphi(t_1)$  a až potom bodom  $\varphi(t_2)$ ), t.j.,

$$\varphi(t_1) \prec \varphi(t_2) \iff t_1 < t_2, \quad (6)$$

potom krivka  $\varphi$  je **orientovaná súhlasne s parametrizáciou**. V prípade, ak

$$\varphi(t_2) \prec \varphi(t_1) \iff t_1 < t_2, \quad (7)$$

krivka  $\varphi$  je **orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou**. Krivka s usporiadaním  $\prec$  sa označuje ako **orientovaná krivka**. V prípade kompaktného intervalu  $\mathcal{I} = [a, b]$  a orientovanej krivky  $\varphi$  je možné jeden z krajných bodov  $\varphi(a)$  a  $\varphi(b)$  vyhlásiť za začiatočný bod a druhý za koncový bod krivky  $\varphi$ . Opačná krivka má opačnú orientáciu. Orientácia Jordanovej krivky je zadaná smerom dotykového vektora v jednom bode krivky. Potom Jordanova krivka je **kladne orientovaná**, ak je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek. V opačnom prípade hovoríme o **záporne orientovanej** Jordanovej krivke.

# Delenie a dĺžka krivky

Nech  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  je krivka súhlasne orientovaná s parametrizáciou a uvažujme konečné delenie intervalu  $[a, b]$ , t.j.,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Body  $P_i = \varphi(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , trajektórie  $\langle \varphi \rangle$  potom zrejme spĺňajú

$$P_0 \prec P_1 \prec \dots \prec P_n.$$

Množina  $D = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  sa nazýva **delenie  $D$  krivky  $\varphi$** . Ak krivka  $\varphi$  je uzavretá, požadujeme  $P_0 = P_n$ . Množinu  $\langle \varphi \rangle$  aproximujeme lomenou čiarou  $L$  tvorenou úsečkami  $\overline{P_{i-1}P_i}$  pre  $i = 1, \dots, n$ , t.j.,

$$L = \overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}. \quad (8)$$

Pre jej dĺžku  $m_1(L)$  potom platí

$$m_1(L) = |\overline{P_0P_1}| + \dots + |\overline{P_{n-1}P_n}| \quad (9)$$

### Definícia 7 (Dĺžka krivky)

Ak existuje reálne číslo  $M$  také, že pre každú lomenú čiaru  $L$  v (8) platí

$$m_1(L) \leq M,$$

potom povieme, že krivka  $\varphi$  **má konečnú dĺžku** alebo **je rektifikovateľná**. Najmenšie takéto číslo  $M$  nazveme **dĺžka krivky**  $\varphi$  a označíme  $m_1(\langle\varphi\rangle)$ .

Ak krivka  $\varphi$  má konečnú dĺžku, potom množina reálnych čísiel

$$\{m_1(L), L \text{ je lomená čiara v (8)}\}$$

je zhora ohraničená, a má teda suprérum rovné  $m_1(\langle\varphi\rangle)$ .

### Veta 2

Každá regulárna krivka  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  má konečnú dĺžku a platí

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_m(t))^2} dt.$$

Vzorec vo Vete 2 platí aj v prípade po častiach hladkej krivky  $\varphi$ .



### Príklad 8

Uvažujme skrutkovicu  $\varphi$  v  $\mathbb{R}^3$  danú parametrickým vyjadrením

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Krivka  $\varphi$  je regulárna a pre každé  $t \in [0, 2\pi]$  platí

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Preto daná skrutkovica je rektifikovateľná krivka a na  $[0, 2\pi]$  má dĺžku

$$m_1(\langle \varphi \rangle) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

### Príklad 9

Krivka  $\varphi$  v  $\mathbb{R}^3$  daná

$$x = t, \quad y = \begin{cases} t \sin \frac{\pi}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad t \in [-1, 1],$$

nemá dĺžku, pretože množina dĺžok  $m_1(L)$  je zhora neohraničená.

# Prirodzená parametrizácia krivky

Pre každú krivku konečnej dĺžky je možné zvoliť jej parametrizáciu tak, aby parameter vyjadroval priamo dĺžku krivky. Konkrétne, ak  $s_1, s_2$  sú dve hodnoty parametra spĺňajúce  $s_1 < s_2$ , potom časť krivky odpovedajúca intervalu  $[s_1, s_2]$  má dĺžku  $s_2 - s_1$ . Takejto parametrizácii hovoríme **prirodzená parametrizácia krivky**. Ak  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  je hladká krivka, potom funkcia

$$s(t) = \int_a^t \|\varphi'(u)\| \, du$$

je definovaná a spojitou diferencovateľná na intervale  $[a, b]$  s  $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$ . Nakoľko  $\|\varphi'(t)\| > 0$  na  $[a, b]$ , funkcia  $s(t)$  je prostá na  $[a, b]$  s oborom hodnôt  $[0, m_1(\langle\varphi\rangle)]$ . Ak  $w(s)$  je funkcia inverzná k  $s(t)$ , potom parametrizácia

$$\varphi(w(s)), \quad s \in [0, m_1(\langle\varphi\rangle)],$$

je práve prirodzenou parametrizáciou krivky  $\varphi$ . Poznamenajme, že podľa Definície 4 sú krivky  $\varphi$  a  $\varphi \circ w$  ekvivalentné, a teda majú rovnaké trajektórie.

## Príklad 10

Nájdime prirodzenú parametrizáciu časti asteroidy z Príkladu 7. Pre  $t \in [0, \pi/2]$  platí

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\varphi'(u)\| \, du = \int_0^t \sqrt{(-3a \cos^2 u \sin u)^2 + (3a \sin^2 u \cos u)^2} \, du \\ &= \frac{3a}{2} \sin^2 t, \end{aligned}$$

z čoho  $s(\pi/2) = 3a/2$ . Inverzná funkcia  $w(s)$  je teda definovaná na intervale  $[0, 3a/2]$  a platí

$$w(s) = \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3a}}, \quad s \in \left[0, \frac{3a}{2}\right].$$

Prirodzená parametrizácia časti krivky  $\varphi$  má potom tvar

$$x = a(1 - 2s/3a)^{3/2}, \quad y = a(2s/3a)^{3/2}, \quad s \in \left[0, \frac{3a}{2}\right].$$

Krivky  $\varphi$  a  $\varphi \circ w$  však nie sú ekvivalentné, hoci majú rovnakú trajektóriu. Krivka  $\varphi$  totiž nie je hladká na  $[0, \pi/2]$  (v bodoch  $t = 0, \pi/2$  má nulovú deriváciu), kým krivka  $\varphi \circ w$  je hladká na  $[0, 3a/2]$ .

# Obsah

- 1 Krivky a ich parametrizácie
- 2 Krivkový integrál prvého druhu**

# Krivkový integrál I. druhu

Nech  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  je hladká krivka a nech  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  je ohraničená funkcia ( $m$  premenných). Pre  $n \in \mathbb{N}$  uvažujme delenie intervalu  $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

a k nemu prislúchajúce delenie krivky  $\varphi$

$$D_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}, \quad P_i = \varphi(t_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Body  $P_0, \dots, P_n$  rozdelia krivku  $\varphi$  na  $n$  úsekov  $s_i = \varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ktoré sa nazývajú **elementy krivky**  $\varphi$ . Dĺžku elementu  $s_i$  označíme  $m_1(s_i)$ . Číslo

$$\|D_n\| := \max\{m_1(s_1), \dots, m_1(s_n)\}$$

sa nazýva **norma delenia**  $D_n$ . V každej z množín  $\langle s_i \rangle$  zvolíme ľubovoľne bod  $M_i$  a utvoríme **integrálny súčet funkcie  $f$  s delením  $D_n$  krivky  $\varphi$  a s výberom bodov  $M_1, \dots, M_n$**

$$S(f, D_n) := \sum_{i=1}^n f(M_i) m_1(s_i). \quad (10)$$

### Definícia 8 (Krivkový integrál I. druhu)

Hovoríme, že existuje **krivkový integrál prvého druhu z funkcie  $f$  po krivke  $\varphi$** , ak pre každú postupnosť  $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$  delení krivky  $\varphi$  takú, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0, \quad (11)$$

príslušná postupnosť  $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$  integrálnych súčtov funkcie  $f$  **konverguje** pre každý výber bodov  $M_1, \dots, M_n$ .

Postupnosť  $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$  delení krivky  $\varphi$  s vlastnosťou (11) nazývame **normálnou**. Platí, že ak existuje krivkový integrál I. druhu z funkcie  $f$  po krivke  $\varphi$ , potom všetky postupnosti  $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$  integrálnych súčtov funkcie  $f$  z Definície 8 majú rovnakú limitu. Túto limitu potom nazývame **krivkovým integrálom I. druhu z funkcie  $f$  po krivke  $\varphi$**  a označujeme

$$\int_{\varphi} f(x) ds, \quad \text{t.j.,} \quad \int_{\varphi} f(x) ds := \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n). \quad (12)$$

Všimnime si, že Definícia 8 nevyžaduje, aby krivka  $\varphi$  bola jednoduchá. Integrál (12) sa dá definovať i v prípade po častiach hladkej krivky  $\varphi$ .

# Základné vlastnosti krivkových integrálov I. druhu

V nasledujúcich vetách budeme uvažovať po častiach hladké krivky.

## Veta 3 (Linearita vzhľadom na integrand)

Nech existujú integrály  $\int_{\varphi} f(x) ds$  a  $\int_{\varphi} g(x) ds$  a nech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Potom existuje aj integrál  $\int_{\varphi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] ds$  a platí

$$\int_{\varphi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] ds = \alpha \int_{\varphi} f(x) ds + \beta \int_{\varphi} g(x) ds.$$

## Veta 4 (Aditivita vzhľadom na integračný obor)

Nech  $\varphi$  a  $\psi$  sú krivky také, že súčet  $\varphi \oplus \psi$  je definovaný. Ďalej nech existujú integrály  $\int_{\varphi} f(x) ds$ ,  $\int_{\psi} f(x) ds$  a  $\int_{\varphi \oplus \psi} f(x) ds$ . Potom platí

$$\int_{\varphi \oplus \psi} f(x) ds = \int_{\varphi} f(x) ds + \int_{\psi} f(x) ds.$$

### Veta 5 (Nezávislosť na orientácii krivky)

Nech  $\varphi$  je orientovaná krivka. Potom integrál  $\int_{\varphi} f(x) ds$  existuje práve vtedy, keď existuje integrál  $\int_{\ominus\varphi} f(x) ds$  a platí

$$\int_{\varphi} f(x) ds = \int_{\ominus\varphi} f(x) ds.$$

### Veta 6 (Nezávislosť na ekvivalentnej parametrizácii krivky)

Nech  $\varphi$  a  $\psi$  sú ekvivalentné krivky. Potom integrál  $\int_{\varphi} f(x) ds$  existuje práve vtedy, keď existuje integrál  $\int_{\psi} f(x) ds$  a platí

$$\int_{\varphi} f(x) ds = \int_{\psi} f(x) ds.$$

### Veta 7 (Dĺžka krivky)

Pre dĺžku rektifikovateľnej krivky  $\varphi$  platí  $m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} ds$ .



**Veta 8**

*Nech existují integrály  $\int_{\varphi} f(x) ds$  a  $\int_{\varphi} g(x) ds$  a nech platí  $f(x) \leq g(x)$  pro každé  $x \in \langle \varphi \rangle$ . Potom platí*

$$\int_{\varphi} f(x) ds \leq \int_{\varphi} g(x) ds.$$

**Veta 9**

*Nech  $\varphi$  je rektifikovatelná křivka a nech existují  $h, H \in \mathbb{R}$  tak, že platí  $h \leq f(x) \leq H$  pro každé  $x \in \langle \varphi \rangle$ . Nech existuje integrál  $\int_{\varphi} f(x) ds$ . Potom*

$$h m_1(\langle \varphi \rangle) \leq \int_{\varphi} f(x) ds \leq H m_1(\langle \varphi \rangle).$$

# Výpočet krivkového integrálu I. druh

Prakticky sa krivkový integrál I. druhu počíta prevodom na určitý (Riemannov) integrál z funkcie jednej premennej.

## Veta 10

*Nech  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  je po častiach hladká krivka a nech  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  je ohraničená funkcia, t.j., existuje  $M \in \mathbb{R}$  tak, že  $|f(x)| \leq M$  pre každé  $x \in \langle \varphi \rangle$ . Ďalej nech existuje Riemannov integrál*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

*Potom existuje i integrál  $\int_{\varphi} f(x) ds$  a platí*

$$\int_{\varphi} f(x) ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

### Príklad 11

Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_{\varphi} \sin 2x \, ds,$$

kde  $\langle \varphi \rangle$  je časť grafu funkcie  $y = \cos x$  pre  $x \in [0, \pi/2]$ . Krivka  $\varphi$  má napr. parametrizáciu

$$x(t) = t, \quad y(t) = \cos t, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Krivka  $\varphi$  je hladká a platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -\sin t) \implies \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Podľa Vety 10 potom platí

$$\int_{\varphi} \sin 2x \, ds = \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 + \sin^2 t} \, dt = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

## Příklad 12

Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) ds,$$

kde  $\varphi$  je skrutkovica

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Platí  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 t^2$  pre každé  $t \in [0, 2\pi]$  a

$$x'(t) = -a \sin t, \quad y'(t) = a \cos t, \quad z'(t) = b,$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Podľa Vety 10 potom máme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} \left( a^2 + \frac{4}{3} \pi^2 b^2 \right). \end{aligned}$$

# Aplikácie krivkového integrálu I. druhu

- Dĺžka krivky

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} ds. \quad (13)$$

- Hmotnosť krivky s hustotou  $\rho = \rho(x)$

$$M(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} \rho(x) ds. \quad (14)$$

- Obsah valcovej plochy

$$m_2(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} f(x, y) ds. \quad (15)$$

# Dĺžka krivky

## Príklad 13

Vypočítajme dĺžku reťazovky, ktorá je grafom funkcie

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad \text{pre } a = 3/2 \quad \text{a } x \in [-2, 2].$$

Zavedieme vhodnú parametrizáciu, napríklad

$$x = t, \quad y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right), \quad t \in [-2, 2].$$

Jedná sa o hladkú krivku  $\varphi$ , pričom platí

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \left( e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}} \right) / 2,$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \left( e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right) / 2, \quad t \in [-2, 2].$$

Podľa vzorca na predchádzajúcom slide (resp. podľa Vety 7) potom máme

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_{\varphi} ds = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \left( e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}} \right) dt = 2a \sinh \frac{2}{a} = 3 \sinh \frac{4}{3}.$$

# Obsah valcovej plochy

## Príklad 14

Vypočítajme obsah prednej steny klinu, ktorý vznikol z trojbokého hranola ohraničeného rovinami  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  a  $z = 0$  odsekom plochou  $z = 4 - y^2$ .

Po nakreslení vhodného obrázku zistíme, že máme vypočítať obsah valcovej plochy, ktorej základňou je krivka  $\varphi : x + y = 2$ ,  $x, y \geq 0$ , a ktorá je zhora ohraničená grafom funkcie  $z = f(x, y) = 4 - y^2$ . Parametrizujeme danú krivku

$$x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in [0, 2].$$

Ide o hladkú krivku s  $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ . Potom pre hľadaný obsah platí

$$m_2(\langle \varphi \rangle) = \int_{\varphi} f(x, y) \, ds = \int_{\varphi} (4 - y^2) \, ds = \int_0^2 [4 - (2 - t)^2] \sqrt{2} \, dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$