Krivkový integrál

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Skalárne a vektorové funkcie

Definícia 1

Nech n, m sú prirodzené čísla. Zobrazenie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva reálna m-vektorová funkcia n reálnych premenných. Každému n-rozmernému vektoru $x \in \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ sa priradí práve jeden m-rozmerný vektor

$$f(x) = (f_1(x),\, f_2(x),\, \cdots,\, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m,$$

Funkcie $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sa nazývajú zložky vektorovej funkcie f.

Nech $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ je vektorová funkcia n premenných. Potom

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \cap \cdots \mathcal{D}(f_m).$$

Ak $m = n = 1$, funkcia f sa nazýva aj skalárne pole. V prípade $m = n \geq 2$ hovoríme o vektorovom poli. Limita a spojitosť vektorovej funkcie f sa definuje po jednotlivých jej zložkách f_i, t.j.,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x),\, \lim_{x \to x_0} f_2(x),\, \cdots,\, \lim_{x \to x_0} f_m(x) \right).$$

Pojem krivky v $\mathbb{R}^m$

Definícia 2

Nech m je prirodzené číslo a $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Krivkou v $\mathbb{R}^m$ rozumieme každú vektorovú funkciu $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$, ktorá je spojitá na $\mathcal{I}$. Množina

$$\langle\varphi\rangle := \varphi(\mathcal{I}) = \{\varphi(t),\ t \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

sa nazýva geometrický obraz (trajektória) krivky φ. Funkcia φ sa potom označuje ako parametrizácia množiny $\langle\varphi\rangle$. Ak $\mathcal{I} = [a, b]$ je kompaktný interval, potom $\varphi(a)$ je začiatočný bod a $\varphi(b)$ je koncový bod krivky.

Definícia 3

Krivka $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva

- jednoduchá, ak φ je prostá na $[a, b]$;
- uzavretá, ak $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- Jordanova, ak φ je prostá na $[a, b)$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$ (t.j., φ je jednoduchá a uzavretá krivka).

Veta 1 (Jordanova)

Nech φ *je Jordanova krivka v* $\mathbb{R}^2$*. Potom existujú dve súvislé oblasti* G_1 *a* G_2 *tak, že každý bod z* $\mathbb{R}^2 \setminus \langle\varphi\rangle$ *patrí práve do jednej z nich. Oblasti* G_1 *a* G_2 *sú teda disjunktné a platí* $G_1 \cup G_2 \cup \langle\varphi\rangle = \mathbb{R}^2$*, pričom trakejtória* $\langle\varphi\rangle$ *krivky* φ *je spoločná hranica množín* G_1 *a* G_2*.*

Poznamenajme, že práve jedna z oblastí G_1 a G_2 je ohraničená a nazýva sa vnútro krivky φ – $\operatorname{Int}\varphi$. Druhá, neohraničená oblasť sa potom označuje ako vonkajšok krivky φ – $\operatorname{Ext}\varphi$.

Príklad 1

Graf každej reálnej funkcie f jednej reálnej premennej t, ktorá je spojitá na nejakom intervale $\mathcal{I}$, je trajektóriou jednoduchej krivky v $\mathbb{R}^2$. Zobrazenie φ

$$\mathcal{I} \ni t \longmapsto \varphi(t) = (t,\ f(t)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

je totiž spojité a prosté na intervale $\mathcal{I}$, a je teda jednoduchou krivkou v $\mathbb{R}^2$.

Príklad 2

Kružnica

$$x = 3 + 2\cos t, \quad y = 2 + 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

je jednoduchá a uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$, teda Jordanova krivka. Rovnice

$$x = 3 + 2\cos t, \quad y = 2 + 2\sin t, \quad t \in [0, 3\pi],$$

určujú trajektóriu krivky, ktorá nie je ani jednoduchá, ani uzavretá. Rovnice

$$x = 3 + 2\cos 2t, \quad y = 2 + 2\sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

popisujú krivku v $\mathbb{R}^2$, ktorá je uzavretá, ale nie je jednoduchá.

Príklad 3

Bernoulliho lemniskáta

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}, \quad y = \frac{a\sqrt{2}\cos t \sin t}{1+\sin^2 t}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0,$$

je uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$, ale nie jednoduchá.

Príklad 4

Cykloida

$$x = rt - d\sin t, \quad y = r - d\cos t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad r, d > 0,$$

nie je uzavretá krivka v $\mathbb{R}^2$. Obyčajná cykloida ($r = d$) a skrátená cykloida ($r > d$) sú jednoduché krivky, kým predĺžená cykloida ($r < d$) nie je jednoduchá krivka.

Definícia 4 (Transformácia parametra)

Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ a $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ sú krivky. Povieme, že φ a ψ sú ekvivalentné a píšeme $\varphi \sim \psi$, ak existuje spojito diferencovateľné zobrazenie $w : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ také, že $w'(t) \neq 0$ pre každé $t \in [\alpha,\beta]$ a platí

$$\varphi(w(t)) = \psi(t) \quad \text{pre každé } t \in [\alpha,\beta].$$

Pre funkciu w z Definície 4 platí že derivácia $w'(t)$ nemení znamienko na $[\alpha,\beta]$, a teda w je buď rastúca alebo klesajúca na $[\alpha,\beta]$. Preto funkcia w je prostá a jej inverzia w^{-1} je tiež spojito diferencovateľná na $[\alpha,\beta]$. Relácia $\sim$ je teda skutočne ekvivalencia a platí $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$, t.j., zachováva trajektórie kriviek. Definícia 4 potom vyjadruje transformáciu parametrizácie množiny φ.

Príklad 5

Uvažujme krivky φ a ψ dané

$$\begin{aligned}
\varphi &: \; x = t, \quad y = t, \quad t \in (0,1), \\
\psi &: \; x = t^3, \quad y = t^3, \quad t \in (0,1).
\end{aligned}$$

Trajektóriou oboch kriviek je otvorená úsečka spájajúca body $[0,0]$ a $[1,1]$. Krivky φ a ψ sú ekvivalentné s funkciou $w : (0,1) \to (0,1)$ tvaru $w(t) = t^3$.

Definícia 5

Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ a $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$ sú krivky spĺňajúce $\varphi(b) = \psi(\alpha)$. Súčtom kriviek φ a ψ rozumieme krivku $\varphi \oplus \psi$ danú

$$(\varphi \oplus \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b] \\ \psi(t+\alpha-b), & t \in [b, b+\beta-\alpha]. \end{cases} \tag{1}$$

Opačnou krivkou ku krivke φ rozumieme krivku $\ominus\varphi$ danú

$$(\ominus\varphi)(t) := \varphi(-t), \quad t \in [-b,-a]. \tag{2}$$

Z Definície 5 priamo vyplýva $\langle \ominus\varphi \rangle = \langle \varphi \rangle$ a $\langle \varphi \oplus \psi \rangle = \langle \varphi \rangle \cup \langle \psi \rangle$. Operácia $\oplus$ je asociatívna, t.j., pre každé tri krivky φ, ψ a ω v $\mathbb{R}^m$ platí

$$(\varphi \oplus \psi) \oplus \omega = \varphi \oplus (\psi \oplus \omega),$$

ak aspoň jedna strana rovnosti má zmysel. Rozdiel kriviek φ a ω definujeme

$$\varphi \ominus \psi := \varphi \oplus (\ominus \psi), \tag{3}$$

ak súčet $\varphi \oplus (\ominus\psi)$ je definovaný, t.j., platí $\varphi(b) = \psi(\beta)$.

Nech $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ je krivka v $\mathbb{R}^m$ definovaná na kompaktnom intervale $[a, b]$. Deriváciou krivky φ v bode $t \in [a, b]$ rozumieme vektor

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \cdots, \varphi_m'(t)), \tag{4}$$

pričom pre $t = a$, resp. $t = b$ uvažujeme príslušné jednostranné derivácie funkcií φ_i, t.j.,

$$\varphi'(a) = \left((\varphi_1)'_+(a), \cdots, (\varphi_m)'_+(a)\right), \quad \varphi'(b) = \left((\varphi_1)'_-(b), \cdots, (\varphi_m)'_-(b)\right).$$

Ak $\varphi'(t) \neq 0$, vektor $\varphi'(t)$ sa nazýva dotykový vektor ku krivke φ v bode t a vektor $\tau(t) := \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ je jednotkový dotykový vektor. Pripomeňme, že

$$\|\varphi'(t)\| := \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}$$

je (euklidovská) norma, resp. veľkosť vektora $\varphi'(t)$. Priamka definovaná

$$\{\varphi(t) + h\varphi'(t), \quad h \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

sa označuje ako dotyčnica krivky φ v bode t. Dotyčnica sa zo všetkých priamok prechádzajúcich cez bod $\varphi(t)$ najviac primkýna ku trajektórii krivky φ.

Definícia 6

Krivka $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ sa nazýva hladká, ak vektorová funkcia φ je spojito diferencovateľná na $[a, b]$ a $\varphi'(t) \neq 0$ pre každé $t \in [a, b]$. V prípade uzavretej hladkej krivky naviac požadujeme $\varphi'(a) = \varphi'(b)$. Krivka φ sa označuje ako po častiach hladká, ak existuje konečné delenie

$$D : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

intervalu $[a, b]$ také, že krivka $\varphi|_{[t_{k-1}, t_k]}$ je hladká pre každé $k = 1, \ldots, n$.

V prípade po častiach hladkej krivky φ teda existuje najviac konečne veľa izolovaných bodov t, v ktorých $\varphi'(t)$ neexistuje. Jednoduchá hladká krivka sa nazýva oblúk (príp. hladký oblúk). Ak v Definícii 6 vynecháme podmienku nenulovosti derivácie φ' na intervale $[a, b]$, dostaneme tzv. regulárnu, resp. po častiach regulárnu krivku. Po častiach regulárna krivka sa nazýva aj cesta.

Príklad 6

Kružnica alebo elipsa sú jednoduché hladké krivky (Jordanove hladké krivky). Obvod štvorca alebo obdĺžnika je jednoduchá po častiach hladká krivka.

Príklad 7

Asteroida

$$\varphi(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t), \quad a > 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

je príkladom jednoduchej uzavretej regulárnej krivky (Jordanova regulárna krivka). Nie je však hladkou krivkou, nakoľko derivácia

$$\varphi'(t) = (-3a\cos^2 t \sin t,\, 3a\sin^2 t \cos t)$$

má nulovú hodnotu v bodoch $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. Podľa Definície 6 nie je ani po častiach hladkou krivkou. Ako ukážeme neskôr, vhodnou transformáciou parametra získame krivku, ktorá má rovnakú trajektóriu a je po častiach hladká.

Orientácia krivky

Nech φ je krivka v $\mathbb{R}^m$ definovaná na intervale $\mathcal{I}$. Stanoviť orientáciu krivky φ znamená zvoliť nejaké usporiadanie na množine $\langle\varphi\rangle$, t.j., chceme určiť, ktorým smerom sa pohybujeme po trajektórii krivky. Ak pre každú dvojicu $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ s $t_1 < t_2$ platí, že bod $\varphi(t_1)$ je pred bodom $\varphi(t_2)$ v danom usporiadaní (pohybom po $\langle\varphi\rangle$ prechádzame najprv bodom $\varphi(t_1)$ a až potom bodom $\varphi(t_2)$), t.j.,

$$\varphi(t_1) \prec \varphi(t_2) \iff t_1 < t_2, \tag{6}$$

potom krivka φ je orientovaná súhlasne s parametrizáciou. V prípade, ak

$$\varphi(t_2) \prec \varphi(t_1) \iff t_1 < t_2, \tag{7}$$

krivka φ je orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou. Krivka s usporiadaním $\prec$ sa označuje ako orientovaná krivka. V prípade kompaktného intervalu $\mathcal{I} = [a, b]$ a orientovanej krivky φ je možné jeden z krajných bodov $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ vyhlásiť za začiatočný bod a druhý za koncový bod krivky φ. Opačná krivka má opačnú orientáciu. Orientácia Jordanovej krivky je zadaná smerom dotykového vektora v jednom bode krivky. Potom Jordanova krivka je kladne orientovaná, ak je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek. V opačnom prípade hovoríme o záporne orientovanej Jordanovej krivke.

Delenie a dĺžka krivky

Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ je krivka súhlasne orientovaná s parametrizáciou a uvažujme konečné delenie intervalu $[a,b]$, t.j.,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Body $P_i = \varphi(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, trajektórie $\langle \varphi \rangle$ potom zrejme spĺňajú

$$P_0 \prec P_1 \prec \cdots \prec P_n.$$

Množina $D = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ sa nazýva delenie D krivky φ. Ak krivka φ je uzavretá, požadujeme $P_0 = P_n$. Množinu $\langle \varphi \rangle$ aproximujeme lomenou čiarou L tvorenou úsečkami $\overline{P_{i-1}P_i}$ pre $i = 1, \ldots, n$, t.j.,

$$L = \overline{P_0P_1} \cup \cdots \cup \overline{P_{n-1}P_n}. \tag{8}$$

Pre jej dĺžku $m_1(L)$ potom platí

$$m_1(L) = |\overline{P_0P_1}| + \cdots + |\overline{P_{n-1}P_n}| \tag{9}$$

Definícia 7 (Dĺžka krivky)

Ak existuje reálne číslo M také, že pre každú lomenú čiaru L v (8) platí

$$m_1(L) \le M,$$

potom povieme, že krivka φ má konečnú dĺžku alebo je rektifikovateľná. Najmenšie takéto číslo M nazveme dĺžka krivky φ a označíme $m_1(\langle\varphi\rangle)$.

Ak krivka φ má konečnú dĺžku, potom množina reálnych čísiel

$$\{m_1(L),\ L \text{ je lomená čiara v (8)}\}$$

je zhora ohraničená, a má teda suprémum rovné $m_1(\langle\varphi\rangle)$.

Veta 2

Každá regulárna krivka $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ má konečnú dĺžku a platí

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Vzorec vo Vete 2 platí aj v prípade po častiach hladkej krivky φ.

Príklad 8

Uvažujme skrutkovicu φ v $\mathbb{R}^3$ danú parametrickým vyjadrením

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Krivka φ je regulárna a pre každé $t \in [0, 2\pi]$ platí

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Preto daná skrutkovica je rektifikovateľná krivka a na $[0, 2\pi]$ má dĺžku

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Príklad 9

Krivka φ v $\mathbb{R}^3$ daná

$$x = t, \quad y = \begin{cases} t\sin\frac{\pi}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \qquad t \in [-1, 1],$$

nemá dĺžku, pretože množina dĺžok $m_1(L)$ je zhora neohraničená.

Prirodzená parametrizácia krivky

Pre každú krivku konečnej dĺžky je možné zvoliť jej parametrizáciu tak, aby parameter vyjadroval priamo dĺžku krivky. Konkrétne, ak s_1, s_2 sú dve hodnoty parametra spĺňajúce $s_1 < s_2$, potom časť krivky odpovedajúca intervalu $[s_1, s_2]$ má dĺžku $s_2 - s_1$. Takejto parametrizácii hovoríme prirodzená parametrizácia krivky. Ak $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ je hladká krivka, potom funkcia

$$s(t) = \int_a^t \|\varphi'(u)\| \, \mathrm{d}u$$

je definovaná a spojito diferencovateľná na intervale $[a, b]$ s $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$. Nakoľko $\|\varphi'(t)\| > 0$ na $[a, b]$, funkcia $s(t)$ je prostá na $[a, b]$ s oborom hodnôt $[0, m_1(\langle\varphi\rangle)]$. Ak $w(s)$ je funkcia inverzná k $s(t)$, potom parametrizácia

$$\varphi(w(s)), \quad s \in [0, m_1(\langle\varphi\rangle)],$$

je práve prirodzenou parametrizáciou krivky φ. Poznamenajme, že podľa Definície 4 sú krivky φ a $\varphi \circ w$ ekvivalentné, a teda majú rovnaké trajektórie.

Príklad 10

Nájdime prirodzenú parametrizáciu časti asteroidy z Príkladu 7. Pre $t \in [0, \pi/2]$ platí

$$s(t) = \int_0^t \|\varphi'(u)\| \,\mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{(-3a\cos^2 u \sin u)^2 + (3a \sin^2 u \cos u)^2} \,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{3a}{2} \sin^2 t,$$

z čoho $s(\pi/2) = 3a/2$. Inverzná funkcia $w(s)$ je teda definovaná na intervale $[0, 3a/2]$ a platí

$$w(s) = \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3a}}, \quad s \in \left[0, \frac{3a}{2}\right].$$

Prirodzená parametrizácia časti krivky φ má potom tvar

$$x = a\,(1 - 2s/3a)^{3/2}, \quad y = a\,(2s/3a)^{3/2}, \quad s \in \left[0, \frac{3a}{2}\right].$$

Krivky φ a $\varphi \circ w$ však nie sú ekvivalentné, hoci majú rovnakú trajektóriu. Krivka φ totiž nie je hladká na $[0, \pi/2]$ (v bodoch $t = 0, \pi/2$ má nulovú deriváciu), kým krivka $\varphi \circ w$ je hladká na $[0, 3a/2]$.

Obsah

Krivkový integrál I. druhu

Nech $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ je hladká krivka a nech $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkcia (m premenných). Pre $n \in \mathbb{N}$ uvažujme delenie intervalu $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

a k nemu prislúchajúce delenie krivky φ

$$D_n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}, \quad P_i = \varphi(t_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Body $P_0, \ldots, P_n$ rozdelia krivku φ na n úsekov $s_i = \varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \ldots, n$, ktoré sa nazývajú elementy krivky φ. Dĺžku elementu s_i označíme $m_1(s_i)$. Číslo

$$\|D_n\| := \max\{m_1(s_1), \ldots, m_1(s_n)\}$$

sa nazýva norma delenia D_n. V každej z množín $\langle s_i\rangle$ zvolíme ľubovoľne bod M_i a utvoríme integrálny súčet funkcie f s delením D_n krivky φ a s výberom bodov $M_1, \ldots, M_n$

$$S(f, D_n) := \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, m_1(s_i). \tag{10}$$

Definícia 8 (Krivkový integrál I. druhu)

Hovoríme, že existuje krivkový integrál prvého druhu z funkcie f po krivke φ, ak pre každú postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ takú, že

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0, \tag{11}$$

príslušná postupnosť $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f konverguje pre každý výber bodov $M_1, \ldots, M_n$.

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ s vlastnosťou (11) nazývame normálnou. Platí, že ak existuje krivkový integrál I. druhu z funkcie f po krivke φ, potom všetky postupnosti $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f z Definície 8 majú rovnakú limitu. Túto limitu potom nazývame krivkovým integrálom I. druhu z funkcie f po krivke φ a označujeme

$$\int_{\varphi} f(x)\,\mathrm{d}s, \quad \text{t.j.,} \quad \int_{\varphi} f(x)\,\mathrm{d}s := \lim_{n\to\infty} S(f, D_n). \tag{12}$$

Všimnime si, že Definícia 8 nevyžaduje, aby krivka φ bola jednoduchá. Integrál (12) sa dá definovať i v prípade po častiach hladkej krivky φ.

Základné vlastnosti krivkových integrálov I. druhu

V nasledujúcich vetách budeme uvažovať po častiach hladké krivky.

Veta 3 (Linearita vzhľadom na integrand)

Nech existujú integrály $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$ *a* $\int_\varphi g(x)\,\mathrm{d}s$ *a nech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Potom existuje aj integrál* $\int_\varphi [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\,\mathrm{d}s$ *a platí*

$$\int_\varphi [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\,\mathrm{d}s = \alpha \int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s + \beta \int_\varphi g(x)\,\mathrm{d}s.$$

Veta 4 (Aditivita vzhľadom na integračný obor)

Nech φ *a* ψ *sú krivky také, že súčet* $\varphi \oplus \psi$ *je definovaný. Ďalej nech existujú integrály* $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$, $\int_\psi f(x)\,\mathrm{d}s$ *a* $\int_{\varphi\oplus\psi} f(x)\,\mathrm{d}s$. *Potom platí*

$$\int_{\varphi\oplus\psi} f(x)\,\mathrm{d}s = \int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s + \int_\psi f(x)\,\mathrm{d}s.$$

Veta 5 (Nezávisloť na orientácii krivky)

Nech φ *je orientovaná krivka. Potom integrál* $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$ *existuje práve vtedy, keď existuje integrál* $\int_{\ominus\varphi} f(x)\,\mathrm{d}s$ *a platí*

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s = \int_{\ominus\varphi} f(x)\,\mathrm{d}s.$$

Veta 6 (Nezávisloť na ekvivalentnej parametrizácii krivky)

Nech φ *a* ψ *sú ekvivalentné krivky. Potom integrál* $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$ *existuje práve vtedy, keď existuje integrál* $\int_\psi f(x)\,\mathrm{d}s$ *a platí*

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s = \int_\psi f(x)\,\mathrm{d}s.$$

Veta 7 (Dĺžka krivky)

Pre dĺžku rektifikovateľnej krivky φ *platí* $m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_\varphi \mathrm{d}s$.

Veta 8

Nech existujú integrály $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$ *a* $\int_\varphi g(x)\,\mathrm{d}s$ *a nech platí* $f(x) \le g(x)$ *pre každé* $x \in \langle\varphi\rangle$. *Potom platí*

$$\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s \le \int_\varphi g(x)\,\mathrm{d}s.$$

Veta 9

Nech φ *je rektifikovateľná krivka a nech existujú* $h, H \in \mathbb{R}$ *tak, že platí* $h \le f(x) \le H$ *pre každé* $x \in \langle\varphi\rangle$. *Nech existuje integrál* $\int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s$. *Potom*

$$h\, m_1(\langle\varphi\rangle) \le \int_\varphi f(x)\,\mathrm{d}s \le H\, m_1(\langle\varphi\rangle).$$

Výpočet krivkového integrálu I. druhu

Prakticky sa krivkový integrál I. druhu počíta prevodom na určitý (Riemannov) integrál z funkcie jednej premennej.

Veta 10

Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *je po častiach hladká krivka a nech* $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$ *je ohraničená funkcia, t.j., existuje* $M \in \mathbb{R}$ *tak, že* $|f(x)| \leq M$ *pre každé* $x \in \langle\varphi\rangle$. *Ďalej nech existuje Riemannov integrál*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \, \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Potom existuje i integrál $\int_\varphi f(x) \, \mathrm{d}s$ *a platí*

$$\int_\varphi f(x) \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t)) \, \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Príklad 11

Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_{\varphi} \sin 2x \, \mathrm{d}s,$$

kde $\langle\varphi\rangle$ je časť grafu funkcie $y = \cos x$ pre $x \in [0, \pi/2]$. Krivka φ má napr. parametrizáciu

$$x(t) = t, \quad y(t) = \cos t, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Krivka φ je hladká a platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, -\sin t) \implies \|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Podľa Vety 10 potom platí

$$\int_{\varphi} \sin 2x \, \mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 + \sin^2 t} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

Príklad 12

Vypočítajme krivkový integrál I. druhu

$$\int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}s,$$

kde φ je skrutkovica

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Platí $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2t^2$ pre každé $t \in [0, 2\pi]$ a

$$x'(t) = -a\sin t, \quad y'(t) = a\cos t, \quad z'(t) = b,$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Podľa Vety 10 potom máme

$$\int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}\, \mathrm{d}t$$

$$= 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2\right).$$

Aplikácie krivkového integrálu I. druhu

- Dĺžka krivky

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_\varphi \mathrm{d}s. \tag{13}$$

- Hmotnosť krivky s hustotou $\rho = \rho(x)$

$$M(\langle\varphi\rangle) = \int_\varphi \rho(x)\,\mathrm{d}s. \tag{14}$$

- Obsah valcovej plochy

$$m_2(\langle\varphi\rangle) = \int_\varphi f(x,y)\,\mathrm{d}s. \tag{15}$$

Dĺžka krivky

Príklad 13

Vypočítajme dĺžku reťazovky, ktorá je grafom funkcie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \text{pre} \quad a = 3/2 \quad \text{a} \quad x \in [-2, 2].$$

Zavedieme vhodnú parametrizáciu, napríklad

$$x = t, \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right), \quad t \in [-2, 2].$$

Jedná sa o hladkú krivku φ, pričom platí

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}\right)/2,$$

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)/2, \quad t \in [-2, 2].$$

Podľa vzorca na predchádzajúcom slide (resp. podľa Vety 7) potom máme

$$m_1(\langle\varphi\rangle) = \int_\varphi \mathrm{d}s = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right) \mathrm{d}t = 2a \sinh\frac{2}{a} = 3 \sinh\frac{4}{3}.$$

Obsah valcovej plochy

Príklad 14

Vypočítajme obsah prednej steny klinu, ktorý vznikol z trojbokého hranola ohraničeného rovinami $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$ odsekom plochou $z = 4 - y^2$.

Po nakreslení vhodného obrázku zistíme, že máme vypočítať obsah valcovej plochy, ktorej základňou je krivka $\varphi : x + y = 2,\ x, y \geq 0$, a ktorá je zhora ohraničená grafom funkcie $z = f(x, y) = 4 - y^2$. Parametrizujeme danú krivku

$$x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in [0, 2].$$

Ide o hladkú krivku s $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Potom pre hľadaný obsah platí

$$m_2(\langle\varphi\rangle) = \int_\varphi f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_\varphi (4 - y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^2 \left[4 - (2 - t)^2\right] \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Obsah

Krivkový integrál II. druhu

Nech $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ je po častiach hladká orientovaná krivka a nech $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}^m$ je ohraničená vektorová funkcia (m premenných). Pre $n \in \mathbb{N}$ uvažujme delenie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ intervalu $[a, b]$ a k nemu prislúchajúce delenie krivky φ

$$D_n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}, \quad P_i = \varphi(t_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Body $P_0, \ldots, P_n$ rozdelia krivku φ na n úsekov $s_i = \varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \ldots, n$, ktoré sa nazývajú orientované elementy krivky φ. Dĺžku elementu s_i označíme $m_1(s_i)$. Číslo

$$\|D_n\| := \max\{m_1(s_1), \ldots, m_1(s_n)\}$$

sa nazýva norma delenia D_n. V každej z množín $\langle s_i\rangle$ zvolíme ľubovoľne bod M_i a utvoríme integrálny súčet funkcie f s delením D_n krivky φ a s výberom bodov $M_1, \ldots, M_n$

$$S(f, D_n) := \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot (P_{i-1} - P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot (\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)). \qquad (16)$$

Definícia 9 (Krivkový integrál II. druhu)

Hovoríme, že existuje krivkový integrál druhého druhu z funkcie f po krivke φ, ak pre každú postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ takú, že

$$\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0, \tag{17}$$

príslušná postupnosť $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f konverguje pre každý výber bodov $M_1, \ldots, M_n$.

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení krivky φ s vlastnosťou (17) nazývame normálnou. Platí, že ak existuje krivkový integrál II. druhu z funkcie f po krivke φ, potom všetky postupnosti $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f z Definície 9 majú rovnakú limitu. Túto limitu potom nazývame krivkovým integrálom II. druhu z funkcie f po krivke φ a označujeme

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot \mathrm{d}r, \quad \text{t.j.,} \quad \int_{\varphi} f(x) \cdot \mathrm{d}r := \lim_{n\to\infty} S(f, D_n). \tag{18}$$

Základné vlastnosti krivkových integrálov II. druhu

V nasledujúcich vetách budeme uvažovať po častiach hladké orientované krivky.

Veta 11 (Linearita vzhľadom na integrand)

Nech existujú integrály $\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{dr}$ *a* $\int_\varphi g(x)\cdot \mathrm{dr}$ *a nech* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Potom existuje aj integrál* $\int_\varphi [\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)]\cdot \mathrm{dr}$ *a platí*

$$\int_\varphi [\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)]\cdot \mathrm{dr} = \alpha\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{dr} + \beta\int_\varphi g(x)\cdot \mathrm{dr}.$$

Veta 12 (Aditivita vzhľadom na integračný obor)

Nech φ *a* ψ *sú krivky súhlasne (nesúhlasne) orientované s parametrizáciou a nech súčet* $\varphi\oplus\psi$ *je definovaný. Ďalej nech existujú integrály* $\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{dr}$, $\int_\psi f(x)\cdot \mathrm{dr}$ *a* $\int_{\varphi\oplus\psi} f(x)\cdot \mathrm{ds}$. *Potom platí*

$$\int_{\varphi\oplus\psi} f(x)\cdot \mathrm{dr} = \int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{dr} + \int_\psi f(x)\cdot \mathrm{dr}.$$

Veta 13 (Závisloť na orientácii krivky)

Nech φ *je orientovaná krivka. Potom integrál* $\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{d}r$ *existuje práve vtedy, keď existuje integrál* $\int_{\ominus\varphi} f(x)\cdot \mathrm{d}r$ *a platí*

$$\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{d}r = -\int_{\ominus\varphi} f(x)\cdot \mathrm{d}r.$$

Veta 14 (Ekvivalentná parametrizácia krivky)

Nech φ *a* ψ *sú ekvivalentné, rovnako orientované krivky. Potom integrál* $\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{d}r$ *existuje práve vtedy, keď existuje integrál* $\int_\psi f(x)\cdot \mathrm{d}r$ *a platí*

$$\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{d}r = \int_\psi f(x)\cdot \mathrm{d}r.$$

Výpočet krivkového integrálu II. druhu

Prakticky sa krivkový integrál II. druhu počíta prevodom na určitý (Riemannov) integrál z funkcie jednej premennej.

Veta 15

Nech $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *je po častiach hladká orientovaná krivka a nech* $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}^m$ *je ohraničená vektorová funkcia. Ďalej nech existuje Riemannov integrál*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Potom existuje i integrál $\int_\varphi f(x) \cdot \mathrm{d}r$ *a platí*

$$\int_\varphi f(x) \cdot \mathrm{d}r = \pm \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t,$$

pričom znamienko $+$ *platí v prípade súhlasnej orientácie a znamienko* $-$ *platí v prípade nesúhlasnej orientácie krivky* φ *s jej parametrizáciou.*

Ak krivka $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ a funkcia $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{R}$, ako vektorové funkcie, majú zložky

$$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m), \quad f = (f_1, \cdots, f_m),$$

potom sa krivkový integrál $\int_\varphi f(x) \cdot \mathrm{d}r$ dá zapísať v tvare

$$\int_\varphi f(x) \cdot \mathrm{d}r = \int_\varphi \left[f_1(x)\,\mathrm{d}\varphi_1 + \cdots + f_m(x)\,\mathrm{d}\varphi_m \right].$$

Špeciálne v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{R}^3$ platí

$$\int_\varphi \left[f_1(x,y)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y)\,\mathrm{d}y \right],$$

resp.

$$\int_\varphi \left[f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right].$$

Aplikácie krivkového integrálu II. druhu

- Obsah vnútra uzavretej krivky v $\mathbb{R}^2$
  Nech φ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka v $\mathbb{R}^2$, ktorá je orientovaná súhlasne s parametrizáciou. Nech $\mathcal{A}$ označuje vnútro krivky φ. Potom pre obsah $S(\mathcal{A})$ oblasti $\mathcal{A}$ platí

$$S(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x). \tag{19}$$

- Práca silového poľa po krivke
  Nech φ je po častiach hladká krivka v $\mathbb{R}^m$, ktorá je orientovaná súhlasne s parametrizáciou. Uvažujme v $\mathbb{R}^m$ silové pole reprezentované vektorovou funkciou f. Potom pre prácu W tohto silového poľa po krivke φ platí

$$W = \int_{\varphi} f(x) \cdot \mathrm{d}r. \tag{20}$$

Príklad 15

Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$I = \int_{\varphi} \left[(x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y \right],$$

kde φ je parabola $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$, orientovaná v smere rastu premennej x. Krivku φ parametrizujeme súhlasne s orientáciou, napr.

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in [-1, 1].$$

Potom platí

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t), \quad t \in [-1, 1],$$

a podľa Vety 15 (v I dosadíme za premenné x, y parametrické vyjadrenie)

$$I = +\int_{-1}^{1} \left[(t^2 - 2t \cdot t^2) \cdot 1 + ((t^2)^2 - 2t \cdot t^2) \cdot 2t \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2 \right) \mathrm{d}t = -14/15.$$

Príklad 16

Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$I = \int_{\varphi} (y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z)$$

po skrutkovici φ s parametrickým vyjadrením

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad y = bt, \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ktorá je orientovaná súhlasne s touto parametrizáciou. Vyjadríme diferenciály $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$ pomocou premennej t

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = -a\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = a\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = b\,\mathrm{d}t.$$

Dosadením do integrálu I v zadaní dostaneme

$$\begin{aligned} I &= +\int_0^{2\pi} [a\sin t\cdot(-a\sin t) + bt\cdot(a\cos t) + a\cos t\cdot b]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t\right)\mathrm{d}t = -\pi a^2. \end{aligned}$$

Príklad 17

Pomocou krivkového integrál II. druhu odvoďme vzorec na výpočet obsahu oblasti ohraničenej elipsou φ s polosami a, b, t.j.,

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Elipsa φ je po častiach hladká Jordanova krivka. Uvažujme jej orientáciu súhlasne s danou parametrizáciou. Potom z predchádzajúceho pre obsah jej vnútra platí

$$S = \frac{1}{2}\oint_{\varphi}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Pre diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ platí

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = -a\sin t\,\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = b\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Dosadením do vyššie uvedeného integrálu potom máme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t\cdot b\cos t - b\sin t\cdot(-a\cos t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[ab\cos^2 t + ab\sin^2 t]\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \pi ab. \end{aligned}$$

Príklad 18

Vypočítajme prácu silového poľa $f(x, y, , z) = (y, z, x)$, ktorú vykoná posunutím telesa z bodu $[-1, 0, \mathrm{e}^{\pi}]$ do bodu $[1, 0, 1]$ pozdĺž krivky φ s vyjadrením

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \mathrm{e}^{t}.$$

Nech parameter $t \in [0, \pi]$. Potom $\varphi(0) = [1, 0, 1]$ a $\varphi(\pi) = [-1, 0, \mathrm{e}^{\pi}]$, teda daná krivka je orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou (orientácia krivky v zadaní je od bodu $[-1, 0, \mathrm{e}^{\pi}]$ do bodu $[1, 0, 1]$). Ďalej máme

$$\varphi'(t) = (x'(t),\, y'(t),\, z'(t)) = (-\sin t,\, \cos t,\, \mathrm{e}^{t}), \quad t \in [0, \pi].$$

Pre hľadanú prácu potom platí

$$W = \int_{\varphi} f(x, y, z) \cdot \mathrm{d}r = -\int_0^{\pi} (\sin t,\, \mathrm{e}^{t},\, \cos t) \cdot (-\sin t,\, \cos t,\, \mathrm{e}^{t})\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin^2 t - 2\mathrm{e}^{t} \cos t)\, \mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{\pi} + \pi/2.$$

Vzťah medzi krivkovými integrálmi I. a II. druhu

Ak krivka φ je hladká, t.j., jej derivácia φ' je spojitá a všade nenulová, potom sa krivkový integrál II. druhu pozdĺž krivky φ z nejakej vektorovej funkcie $f(x)$ dá vyjadriť ako krivkový integrál I. druhu pozdĺž φ z istej skalárnej funkcie $g(x)$. Konkrétne, vyjadrenie vo Vete 15 môžeme upraviť

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f(x)\cdot \mathrm{d}r &= \pm\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \pm\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}\,\|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \pm\int_a^b \left[f(\varphi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}\right]\|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \pm\int_a^b g(t)\,\|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \pm\int_\varphi g(x)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

kde $g(t) := [f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)]\,/\|\varphi'(t)\|$ je skalárna funkcia definovaná na $[a,b]$. Ak $\tau(t) := \varphi(t)/\|\varphi'(t)\|$ je jednotkový dotykový vektor ku krivke φ, potom

$$\underbrace{\int_\varphi f(x)\cdot\mathrm{d}r}_{\text{integrál II. druhu z vektorovej funkcie } f} = \underbrace{\int_\varphi (f\cdot\tau)(x)\,\mathrm{d}s}_{\text{integrál I. druhu zo skalárnej funkcie } f\cdot\tau} . \tag{21}$$

Obsah

Greenova integrálna veta

Veta 16 (Greenova integrálna veta)

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblasť v $\mathbb{R}^2$ a nech $A \subseteq \Omega$ je množina, ktorej hranica je kladne orientovaná, po častiach hladká Jordanova krivka φ. Nech $f = (P, Q)$ je vektorová funkcia (vektorové pole) definovaná na oblasti Ω, pričom funkcie P, Q, $\partial P/\partial y$ a $\partial Q/\partial x$ sú spojité na Ω. Potom platí

$$\oint_{\varphi} [P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = \iint_{\bar{A}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{22}$$

kde $\bar{A} := \mathit{Int}\,\varphi \cup \langle \varphi \rangle$ je tzv. uzáver množiny A (v metrickom priestore $\mathbb{R}^2$).

Greenova integrálna veta dáva do súvisu krivkový integrál II. druhu z vektorovej funkcie pozdĺž orientovanej uzavretej rovinnej krivky na dvojný integrál z istej (skalárnej) funkcie po uzávere vnútra tejto krivky. Krivkový integrál II. druhu z vektorovej funkcie pozdĺž uzavretej krivky sa niekedy nazýva aj cirkulácia vektorovej funkcie (vektorového poľa) pozdĺž uzavretej krivky. Hlavná aplikácia Greenovej vety spočíva v prevedení výpočtu krivkového integrálu II. druhu na výpočet dvojného integrálu, pozri nasledujúce príklady.

Príklad 19

Daný krivkový integrál II. druhu vyjadrime ako dvojný integrál

$$I = \oint_{\varphi} \left[\sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x + y \left(xy + \ln \left[x + \sqrt{x^2+y^2} \right] \right) \mathrm{d}y \right],$$

kde φ je kladne orientovaná, po častiach hladká Jordanova krivka. Príslušná vektorová funkcia, z ktorej počítame krivkový integrál, má zložky

$$P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = y \left(xy + \ln \left[x + \sqrt{x^2+y^2} \right] \right).$$

Ďalej máme

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Podľa Greenovej vety 16 potom formálne platí

$$I = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_D y^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde množina $D = \operatorname{Int} \varphi \cup \langle \varphi \rangle$. V súlade s predpokladmi Greenovej vety, posledná rovnosť platí na oblasti D neobsahujúcej bod $[x,y] = [0,0]$.

Príklad 20

Vypočítajme krivkový integrál II. druhu

$$I = \oint_{\varphi} \left[2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y\right],$$

kde $\langle\varphi\rangle$ je kladne orientovaný obvod trojuholníka s vrcholmi $A = [1,1]$, $B = [2,2]$ a $C = [1,3]$. Daný integrál I budeme počítať prevodom na dvojný integrál podľa Greenovej vety. Zložky podintegrálnej vektorovej funkcie sú

$$P(x,y) = 2(x^2 + y^2), \quad Q(x,y) = (x+y)^2,$$

pričom príslušné parciálne derivácie P'_y, Q'_x majú tvar

$$P'_y = 4y, \quad Q'_x = 2(x+y), \quad Q'_x - P'_y = 2(x-y).$$

Krivka φ je kladne orientovaná, po častiach hladká Jordanova krivka a funkcie P, Q, P'_y a Q'_x sú spojité na celom $\mathbb{R}^2$. Podľa Greenovej vety 16 potom platí

$$I = \iint_D 2(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina D predstavuje vnútro spolu s obvodom trojuholníka ABC.

Poznámka 1 (k Príkladu 20)

Kompletný výpočet bude spravený na cvičení :-). Daný krivkový integrál sa samozrejme dá vypočítať tradičným spôsobom, podľa Vety 15, s rovnakým výsledkom. Výpočet je však náročnejší, nakoľko je nutné počítať krivkový integrál z danej funkcie pozdĺž každej strany trojuholníka ABC osobitne a nakoniec získané výsledky sčítať. Tento príklad ilustruje efektívne použitie Greenovej integrálnej vety pri niektorých príkladoch.

Nezávislosť na integračnej ceste I

Príklad 21 (Motivačný)

Uvažujme vektorovú funkciu $f(x, y)$ v $\mathbb{R}^2$ tvaru

$$f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Vypočítajme krivkový integrál z f pozdĺž paraboly $y = x^2 + 1$, orientovanej od bodu $A = [2, 5]$ do bodu $B = [0, 1]$. Jej parametrizácia

$$x = t, \quad y = t^2 + 1, \quad t \in [0, 2]$$

je potom nesúhlasná s danou orientáciou. Ďalej $x'(t) = 1$ a $y'(t) = 2t$. Preto

$$I = \int_{\text{parabola}} f(x,y) \cdot \mathrm{d}r = -\int_0^2 \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}} - \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}} \cdot 2t \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^2 \frac{2t^3+3t}{\sqrt{t^4+3t^2+1}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{29} - 1.$$

Nezávislosť na integračnej ceste II

Príklad 21 (Motivačný)

Vypočítajme teraz krivkový integrál z f pozdĺž úsečky orientovanej od bodu $A = [2, 5]$ do bodu $B = [0, 1]$. Jej parametrizácia má napríklad tvar $x = t$, $y = 1 + 2t$, $t \in [0, 2]$. Potom $x'(t) = 1$ a $y'(t) = 2$ a

$$J = \int_{\text{úsečka}} f(x,y) \cdot \mathrm{d}r = -\int_0^2 \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2 + (1+2t)^2}} - \frac{1+2t}{\sqrt{t^2+(1+2t)^2}} \cdot 2 \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^2 \frac{5t+2}{\sqrt{5t^2+4t+1}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{29} - 1.$$

V obidvoch prípadoch sme dostali rovnakú hodnotu krivkového integrálu II. druhu z funkcie f, hoci sme zakaždým integrovali po inej krivke. Okrem toho, parabola i úsečka mali spoločný začiatočný i koncový bod a boli rovnako orientované.

Definícia 10 (Nezávislosť na integračnej ceste)

Nech f je vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Hovoríme, že krivkový integrál (II. druhu) z vektorového poľa f nezávisí v Ω na integračnej ceste, ak pre ľubovoľné dve po častiach hladké orientované krivky φ, ψ, ležiace v Ω a majúce spoločný začiatočný i koncový bod, platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot \mathrm{d}r = \int_{\psi} f(x) \cdot \mathrm{d}r. \tag{23}$$

Ekvivalentná formulácia nezávislosti krivkového integrálu na integračnej ceste v Definícii 10 je nasledovná. Krivkový integrál z vektorového poľa f nezávisí v Ω na integračnej ceste, ak pre každú po častiach hladkú, uzavretú orientovanú krivku η, ležiacu v Ω, platí

$$\int_{\eta} f(x) \cdot \mathrm{d}r = 0. \tag{24}$$

S problematikou nezávislosti krivkového integrálu na integračnej ceste úzko súvisí pojem tzv. potenciálového vektorového poľa.

Definícia 11 (Potenciálové vektorové pole)

Nech f je vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Hovoríme, že f je potenciálové na Ω, ak existuje funkcia $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (tzv. potenciál poľa f, alebo aj kmeňová funkcia poľa f) s vlastnosťou

$$f(x) = \operatorname{grad} V(x) := \left(V'_{x_1}(x), \cdots, V'_{x_m}(x)\right) \quad \text{pre každé } x \in \Omega. \tag{25}$$

Hovoríme, že oblasť Ω je jednoducho súvislá (1-násobne súvislá), ak jej doplnok v $\mathbb{R}^m$, t.j., množina $\mathbb{R}^m \setminus \Omega$, je súvislá. Oblasť Ω je n-násobne súvislá, ak jej doplnok $\mathbb{R}^m \setminus \Omega$ má práve n súvislých komponent.

Príklad 22

Ľubovoľný kruh v rovine je jednoducho súvislá oblasť v $\mathbb{R}^2$. Naproti tomu medzikružie $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x^2 + y^2 < 3\}$ je dvojnásobne súvislá oblasť v $\mathbb{R}^2$. Zjednodušene povedané, jednoducho súvislá oblasť nemá "diery", zatiaľ čo n-násobne súvislá oblasť má práve $n - 1$ "dier".

Veta 17 (Nezávislosť na integračnej ceste)

Nech f je vektorové pole definované a spojité na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné.

(i) *Krivkový integrál z vektorového poľa f nezávisí v Ω na integračnej ceste.*

(ii) *Vektorové pole f je potenciálové v Ω.*

Naviac, v tomto prípade pre každú po častiach hladkú orientovanú krivku φ v oblasti Ω so začiatočným bodom A a s koncovým bodom B platí

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot \mathrm{d}r = V(B) - V(A), \tag{26}$$

kde V je ľubovoľný potenciál (kmeňová funkcia) vektorového poľa f v Ω.

V prípade potenciálového poľa f teda hodnota krivkového integrálu II. druhu z f závisí iba na začiatočnom a koncovom bode, nie však na výbere konkrétnej cesty spájajúcej tieto dva body.

Veta 18 (Potenciálové pole v $\mathbb{R}^2$)

Nech $f = (P, Q)$ *je vektorové pole definované na oblasti* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$*, pričom nech funkcie* P, Q *majú spojité parciálne derivácie I. rádu na* Ω*. Potom platí:*

(i) *Ak vektorové pole* f *je potenciálové v* Ω*, potom*

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \quad \text{na } \Omega. \tag{27}$$

(ii) *Nech naviac oblasť* Ω *je jednoducho súvislá. Potom rovnosť v (27) implikuje, že vektorové pole* f *je potenciálové.*

Veta 19 (Potenciálové pole v $\mathbb{R}^3$)

Nech $f = (P, Q, R)$ *je vektorové pole definované na oblasti* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *a nech funkcie* P, Q, R *majú spojité parciálne derivácie I. rádu na* Ω*. Potom platí:*

(i) *Ak vektorové pole* f *je potenciálové v* Ω*, potom*

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x, \quad \partial Q/\partial z = \partial R/\partial y, \quad \partial R/\partial x = \partial P/\partial z \quad \text{na } \Omega. \tag{28}$$

(ii) *Nech naviac oblasť* Ω *je jednoducho súvislá. Potom rovnosť v (28) implikuje, že vektorové pole* f *je potenciálové.*

Príklad 23

Rozhodnime, či vektorové pole

$$f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

je potenciálové v oblasti $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$. Keďže Ω je jednoducho súvislá oblasť, podľa Vety 18 stačí overiť platnosť rovnosti (27) na Ω pre dané pole f. Máme

$$P(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pre príslušné parciálne derivácie funkcií P a Q potom platí

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \quad \text{na } \Omega.$$

Podľa Vety 18 je teda vektorové pole f potenciálové na oblasti Ω. Nájdeme teraz všetky jeho kmeňové funkcie (potenciály) v Ω.

Príklad 23

Z Definície 11 vieme, že kmeňová funkcia $V(x,y)$ vektorového poľa f spĺňa na oblasti Ω rovnosti

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{29}$$

Integrovaním prvej rovnosti v (29) podľa premennej x dostaneme

$$V(x,y) = \int V'_x(x,y)\,\mathrm{d}x = \int -x/\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+y^2} + C(y),$$

kde $C(y)$ je (neznáma) integračná funkcia iba premennej y (integrovali sme podľa x, pričom premennú y sme chápali ako konštantu). Dosadením tohto vyjadrenia funkcie $V(x,y)$ do druhej rovnosti v (29) určíme funkciu $C(y)$

$$\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$C'(y) = 0 \implies C(y) = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Preto každá kmeňová funkcia vektorového poľa f má všeobecný tvar

$$V(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Poznámka 2

Poznamenajme, že pole f z Príkladu 23 je možné spojito rozšíriť na oblasť

$$\Psi = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}.$$

Podobne, potenciál $V(x, y)$ v (30) je možné definovať na celom $\mathbb{R}^2$ a rovnosti (27) i (29) platia aj na Ψ. Pole f je teda podľa Definície 11 potenciálové i na oblasti Ψ, hoci Ψ nie je jednoducho súvislá oblasť v $\mathbb{R}^2$ (pozri podmienku na Ω vo Vete 18). Podľa Vety 17 potom hodnota krivkového integrálu

$$\int_{\varphi} f(x) \cdot \mathrm{d}r$$

nezávisí na integračnej ceste φ ležiacej v oblasti Ψ a je rovná rozdielu

$$V(B) - V(A),$$

kde A, B sú začiatočný a koncový bod orientovanej krivky φ.

Príklad 24

Rozhodnime, či vektorové pole

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

je potenciálové v oblasti $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$. Platí

$$P(x,y) = -y/(x^2+y^2), \quad Q(x,y) = x/(x^2+y^2),$$

$$P'_y = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2, \quad Q'_x = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2 \quad \text{na } \Omega.$$

Nutná podmienka (27) na to, aby f bolo potenciálové pole, je teda splnená. V tomto prípade ale nemusí byť i postačujúcou podmienkou (podľa Vety 18(ii)), pretože oblasť Ω teraz nie je jednoducho súvislá. A skutočne, ako sa môžeme ľahko presvedčiť, krivkový integrál z f po kružnici $\varphi : x^2+y^2 = 4$ je rovný

$$\oint_\varphi f(x) \cdot \mathrm{d}r = \oint_\varphi \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 2\pi \neq 0.$$

Teda krivkový integrál po uzavretej krivke nie je nulový a závisí na integračnej ceste v Ω. Preto podľa Vety 17 vektorové pole f nie je potenciálové.