Komplexná analýza

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Obor komplexných čísiel

Pod pojmom komplexné číslo a rozumieme usporiadanú dvojicu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Prvá zložka α tejto dvojice sa nazýva reálna časť komplexného čísla a, druhá zložka β sa nazýva imaginárna časť komplexného čísla a, označujeme $\alpha = \operatorname{Re} a$ a $\beta = \operatorname{Im} a$. Definujeme sčítanie a násobenie komplexných čísiel

$$(\alpha,\, \beta) + (\gamma,\, \delta) := (\alpha + \gamma,\, \beta + \delta),$$
$$(\alpha,\, \beta) \cdot (\gamma,\, \delta) := (\alpha\gamma - \beta\delta,\, \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Sčítanie i násobenie komplexných čísiel sú asociatívne a komutatívne binárne operácie a pre každú trojicu a, b, c komplexných čísiel platí distributívny zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Pre úplnosť definujeme násobenie komplexného čísla reálnym číslom

$$r(\alpha,\, \beta) := (r\alpha,\, r\beta), \quad r \in \mathbb{R}.$$

- Nula – $(0, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j.,
$$(\alpha,\, \beta) + (0, 0) = (0, 0) + (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, \beta).$$
- Jednotka – $(1, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na násobenie, t.j.,
$$(\alpha,\, \beta) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, \beta).$$

- Opačné číslo ku komplexnému číslu $a = (\alpha,\, \beta)$

$$-a := (-\alpha,\, -\beta)$$

Komplexné číslo $-a$ je jediné riešenie rovnice

$$a + z = (0, 0).$$

- Inverzné číslo k nenulovému komplexnému číslu $a = (\alpha, \beta)$

$$a^{-1} := \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

Komplexné číslo a^{-1} je jediné riešenie rovnice

$$a \cdot z = (1, 0).$$

- Odčítanie komplexných čísiel a, b definujeme $a - b := a + (-b)$.
- Delenie komplexných čísiel $a, b,\ b \neq (0, 0)$, definujeme $a/b := a \cdot b^{-1}$.

Množina všetkých komplexných čísiel sa označuje $\mathbb{C}$. Algebraická štruktúra $(\mathbb{C},\, +,\, \cdot)$ je teleso, ktoré sa nedá usporiadať (na rozdiel od $(\mathbb{R},\, +,\, \cdot)$).

Algebraický tvar komplexného čísla

Podmnožina komplexných čísiel

$$\mathcal{R} := \{a \in \mathbb{C},\ a = (\alpha,\, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

je podtelesom telesa $\mathbb{C}$ izomorfným s telesom $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísiel. Preto je možné množiny $\mathcal{R}$ a $\mathbb{R}$, ako algebraické štruktúry, stotožniť. To znamená, že v množine $\mathbb{C}$ budeme klásť $\alpha = (\alpha,\, 0)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Ďalej, komplexné číslo $(0, 1)$ sa označuje symbolom i, t.j., $\mathrm{i} = (0, 1)$, a nazýva sa imaginárna jednotka. Platí $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$. Tieto označenia potom umožňujú vyjadriť komplexné číslo $a = (\alpha, \beta)$ v tzv. algebraickom tvare

$$a = (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, 0) + (0,\, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha + \mathrm{i}\beta. \tag{1}$$

Komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta = 0$ (teda s $\operatorname{Im} a = 0$) sa označuje ako reálne (komplexné) číslo, kým komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta \neq 0$ (teda s $\operatorname{Im} a \neq 0$) sa nazýva imaginárne (komplexné) číslo. Imaginárne číslo s nulovou reálnou časťou sa nazýva rýdzo imaginárne (komplexné) číslo. Komplexne združené číslo $\bar{a}$ k číslu $a = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ je definované ako $\bar{a} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Absolútna hodnota (veľkosť) $|a|$ komplexného čísla $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ sa definuje

$$|a| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{2}$$

Reálne číslo $|a|$ vyjadruje geometrickú vzdialenosť bodu $[\alpha, \beta]$ od bodu $[0, 0]$ v reálnej rovine. Všeobecne, pre $a, b \in \mathbb{C}$ reálne číslo $|a - b|$ vyjadruje vzájomnú vzdialenosť bodov $[\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a]$ a $[\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b]$ v reálnej rovine.

Poznámka 1 (Základné vlastnosti)

Nech $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\bar{\bar{a}} = a, \quad \overline{a_1 \pm a_2} = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2, \quad \overline{a_1 a_2} = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \overline{a_1 / a_2} = \bar{a}_1 / \bar{a}_2$, ak $a_2 \neq 0$.
- $a\bar{a} = |a|^2, \quad |a_1 a_2| = |a_1||a_2|, \quad |a_1 / a_2| = |a_1| / |a_2|$, ak $a_2 \neq 0$.
- trojuholníkové nerovnosti $||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.
- $|\mathrm{Re}\, a| \leq |a|, \quad |\mathrm{Im}\, a| \leq |a|$.
- $$\mathrm{Re}\, a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, a = \frac{a - \bar{a}}{2\mathrm{i}}.$$
- $\mathrm{Re}\,(a_1 \pm a_2) = \mathrm{Re}\, a_1 \pm \mathrm{Re}\, a_2, \quad \mathrm{Im}\,(a_1 \pm a_2) = \mathrm{Im}\, a_1 \pm \mathrm{Im}\, a_2$.

Komplexná (Gaussova) rovina

Prirodzeným modelom množiny $\mathbb{C}$ komplexných čísiel je (euklidovská) rovina – komplexná (Gaussova) rovina. Každému komplexnému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ je priradený bod v rovine so súradnicami $[x, y]$. Naopak, každému bodu $[x, y]$ roviny odpovedá práve jedno komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$. Ďalej budeme preto pre jednoduchosť stotožňovať body roviny s komplexnými číslami. Vzdialenosť (metrika) sa v množine $\mathbb{C}$ definuje pomocou absolútnej hodnoty komplexného čísla zavedenej v (2), t.j., vzdialenosť dvoch komplexných čísiel z_1 a z_2 je definovaná $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$.

Ako je to s pojmom "komplexné" nekonečno? Pre množinu $\mathbb{C}$ komplexných čísiel sa definuje iba jedno "nekonečno". Konkrétne, k množine $\mathbb{C}$ sa formálne pridá jeden prvok, ktorý sa označuje symbolom ∞, spĺňajúci vlastnosti

$$\infty = -\infty = |\infty|, \quad \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$z + \infty = \infty, \quad z/\infty = 0, \quad \infty/z = \infty \quad \text{pre } z \in \mathbb{C},$$
$$z \cdot \infty = \infty, \quad z/0 = \infty, \quad \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nedefinujú sa výrazy $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Množina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sa spolu s danými algebraickými operáciami označuje $\tilde{\mathbb{C}}$ a nazýva sa rozšírená (uzavretá) komplexná rovina alebo tiež rozšírená (uzavretá) Gaussova rovina.

Goniometrický (polárny) tvar komplexného čísla

S modelom komplexnej roviny úzko súvisí tzv. goniometrický (polárny) tvar komplexných čísiel. Každé nenulové komplexné číslo z je možné vyjadriť v tvare

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{3}$$

kde φ je argument komplexného čísla z definovaný rovnicami

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{4}$$

Argument φ nie je určený jednoznačne (ak φ je argument z, potom i $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je argument z). Množina všetkých argumentov daného komplexného čísla sa označuje $\operatorname{Arg} z$ (je to tzv. mnohoznačná funkcia premennej z). Symbol $\arg z$ bude označovať základný (hlavný) argument komplexného čísla z, t.j., argument spĺňajúci $-\pi \le \arg z < \pi$. Základný argument $\arg z$ je pre dané z určený jednoznačne. Platí

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje i v tvare $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$.

Zavedenie goniometrického tvaru v (3) umožňuje efektívne násobiť a deliť komplexné čísla. Konkrétne, ak

$$z_1 = |z_1| (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1), \quad z_2 = |z_2| (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

sú dve komplexné čísla a φ_1 a φ_2 sú ich ľubovoľné argumenty, potom platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2| [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\qquad + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= |z_1||z_2| [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnosti (6) potom vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{a} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \tag{7}$$

ako aj tzv. Moivreov vzorec na výpočet n-tej mocniny komplexného čísla z

$$z^n = |z|^n [\cos(n\arg z) + \mathrm{i}\sin(n\arg z)], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Okrem toho z relácií (7) vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z \quad \text{a} \quad \arg(z^n) \equiv n\arg z \pmod{2\pi}. \tag{9}$$

Podobne, pre podiel z_1/z_2, $z_2 \neq 0$, platí

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2}\,\frac{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2}\\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}\\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \qquad (10)\end{aligned}$$

Potom máme

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \qquad (11)$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina zo z definovaná ako

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad (12)$$

kde $k = 0, \ldots, n-1$. Pre pevné n sa teda jedná o mnohoznačnú funkciu (premennej z), pričom pre každé $z \in \mathbb{C}$ existuje práve n jeho n-tých odmocnín.

Výraz $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sa obvykle označuje symbolom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, t.j.,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{13}$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ potom platí

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{14}$$

Zápis (14) sa nazýva exponenciálny tvar komplexného čísla z. Pre každé φ, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1, \quad \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 1/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{15}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}, \tag{16}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \tag{17}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Neskôr ukážeme, že výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ zavedený v (13) je rozšírením exponenciálnej funkcie e^x do oboru komplexných čísiel.

Príklad 1

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$1+\mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z potom spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = 1/\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = 1/\sqrt{2}.$$

Riešenie tejto sústavy je napr. $\varphi = 9\pi/4$. Potom platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(9\pi/4) + \mathrm{i}\sin(9\pi/4)].$$

Základný argument čísla z je $\arg z = \pi/4$ a podobne platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)].$$

Príklad 2

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$-2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = -2\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = -\sqrt{3}/2, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = -1/2.$$

Základný argument čísla z je $\arg z = -5\pi/6$ a platí

$$z = 4\left[\cos\left(-5\pi/6\right) + \mathrm{i}\sin\left(-5\pi/6\right)\right].$$

Príklad 3

Vypočítajte

$$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{15}.$$

Použijeme Moivreov vzorec (8). Komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ prepíšeme do goniometrického tvaru. Platí $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$, a teda

$$z = 2\left[\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)\right].$$

Potom podľa (8) máme

$$z^{15} = 2^{15}\left[\cos(15\pi/3) + \mathrm{i}\sin(15\pi/3)\right] = 2^{15}\left[\cos(5\pi) + \mathrm{i}\sin(5\pi)\right] = -2^{15}.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme získali klasickým roznásobením podľa binomickej vety.

Príklad 4

Vypočítajme v $\mathbb{C}$
$$\sqrt[3]{-8}.$$

Podľa (12) existujú práve 3 komplexné tretie odmocniny z čísla $z = -8$. Goniometrický tvar čísla z je

$$z = 8\,[\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)].$$

Podľa (12) platí

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{3}\right)\right],$$

pričom $k = 0, 1, 2.$ Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
k = 0 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\\
k = 1 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\\
k = 2 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2.
\end{aligned}$$

Obsah

Postupnosti v $\mathbb{C}$

Nech $r \in \mathbb{R}^+$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Otvoreným kruhom $K(z_0, r)$ so stredom v bode z_0 a s polomerom r rozumieme množinu $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}$. Množina $K(z_0, r)$ sa často označuje aj ako r-okolie bodu z_0. Ak $z_0 = \infty$, definujeme $K(\infty, r) := \{z \in \tilde{\mathbb{C}},\ |z| > 1/r\}$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísiel. Komplexné číslo $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé ε-okolie bodu a_0 existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in K(a_0, \varepsilon)$ pre každý index $n \geq n_\varepsilon$. Potom píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ alebo aj $a_n \to a_0$.

Veta 1

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$ a $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$. Potom $a_n \to a_0$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a_0| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathit{Re}\, a_n = \mathit{Re}\, a_0 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \mathit{Im}\, a_n = \mathit{Im}\, a_0. \tag{19}$$

V tomto prípade platí i $\overline{a_n} \to \overline{a_0}$. Podobne, $a_n \to \infty$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty, \quad \textit{resp.}, \quad \lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = 0. \tag{20}$$

Číselné rady v $\mathbb{C}$

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$. Postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ (tzv. postupnosť čiastočných súčtov) definovaná ako $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$ sa nazýva nekonečný rad s členmi a_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, resp. $\sum a_n$. Rad $\sum a_n$ konverguje (resp., je konvergentný), ak existuje konečná limita postupnosti $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Túto limitu potom označujeme ako súčet s radu a píšeme $s = \sum a_n$. V opačnom prípade rad $\sum a_n$ diverguje (resp., je divergentný).

Veta 2

Nech $\sum a_n$, $\sum b_n$ sú konvergentné rady a $a, b \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(nutná podmienka konvergencie radu).*
- *Rad $\sum \overline{a_n}$ konverguje so súčtom $\sum \overline{a_n} = \overline{\sum a_n}$.*
- *Rad $\sum (aa_n + bb_n)$ konverguje a $\sum (aa_n + bb_n) = a\sum a_n + b\sum b_n$.*

Veta 3

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje každý z reálnych radov $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\, a_n$, pričom platí $\sum a_n = \sum \mathrm{Re}\, a_n + i \sum \mathrm{Im}\, a_n$.

Komplexný rad $\sum a_n$ sa nazýva absolútne konvergentný, ak rad $\sum |a_n|$ je konvergentný. Každý absolútne konvergentný rad je i konvergentný a platí

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|.$$

Ak $\sum a_n$ konverguje, ale rad $\sum |a_n|$ diverguje, potom hovoríme, že rad $\sum a_n$ konverguje neabsolútne (relatívne). Platia nasledujúce výsledky.

Veta 4

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď každý z reálnych radov $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ konverguje absolútne.

Veta 5 (Riemannova veta o prerovnaní absolútne konvergentného radu)

Ak komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne, potom každé prerovnanie tohto radu konverguje absolútne s rovnakým súčtom, t.j., platí

$$\sum a_{\tau(n)} = \sum a_n$$

pre každú permutáciu τ množiny $\mathbb{N}$ (t.j., pre každú bijekciu $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Pri vyšetrovaní (absolútnej) konvergencie komplexných radov môžeme aplikovať mnohé kritériá využívané v reálnej analýze.

- Porovnávacie kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\sum b_n$ je konvergentný reálny rad, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne.
- D'Alembertovo podielové kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvášť, ak existuje $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ $(q > 1)$ rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- Cauchyho odmocninové kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvášť, ak existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ $(q > 1)$ rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- Cauchyho integrálne kritérium – ak rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| = f(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, nerastúca a spojitá funkcia, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď nevlastný integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Príklad 5

Stanovme limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}.$$
Nájdeme reálnu a imaginárnu časť príslušnej postupnosti. Podľa Príkladu 1 platí

$$\begin{aligned}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!} &= \frac{\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi/4\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi/4\right)\right]\right)^n}{n!}\\ &= \frac{(\sqrt{2})^n\cos\left(\pi n/4\right)}{n!} + \mathrm{i}\,\frac{(\sqrt{2})^n\sin\left(\pi n/4\right)}{n!}.\end{aligned}$$

Teda máme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n\cos\left(\pi n/4\right)}{n!}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n\sin\left(\pi n/4\right)}{n!}.$$

Keďže platí

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right),$$

podľa Vety 1 limita v zadaní príkladu existuje a je rovná $0+\mathrm{i}0=0$.

Príklad 6

Dokážme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n} = 0.$$

Uvedený výsledok vyplýva z Vety 1, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathrm{i}|^n}{n2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = 0.$$

Príklad 7

Nájdime limitu

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}.$$

Táto limita existuje a je nevlastná, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \right| = \lim_{n\to\infty} n \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Pri výpočte sme využili prvú rovnosť v (15), t.j., $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right| = 1$. Podľa Vety 1 potom

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} = \infty.$$

Príklad 8

Nájdime súčet radu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\mathrm{i}\,(-1)^{n-1}n}{n^2}.$$
V danom rade oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+\mathrm{i}\,(-1)^{n-1}n}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1+\mathrm{i}\,(-1)^{n-1}n}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Keďže z reálnej analýzy máme
$$\sum 1/n^2 = \pi^2/6, \quad \sum (-1)^{n-1}/n = \ln 2,$$
podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu a platí
$$\sum \frac{1+\mathrm{i}\,(-1)^{n-1}n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathrm{i}\ln 2.$$

Príklad 9

Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}.$$

Oddelením reálnej a imaginárnej časti daného radu dostaneme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \begin{cases} (-1)^k/(2k), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1, \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}/(2k-1), & n = 2k-1. \end{cases}$$

Obidva reálne rady $\sum \mathrm{Re}$ a $\sum \mathrm{Im}$ konvergujú (podľa Leibnizovho kritéria), a preto podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu.

Príklad 10

Vyšetrime konvergenciu radov

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+\mathrm{i})^n}{3^n}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \qquad a \in \mathbb{C}.$$

a) Rad konverguje absolútne podľa D'Alembertovho kritéria, nakoľko

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(1+\mathrm{i})^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(1+\mathrm{i})^n}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+\mathrm{i})}{3n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Aplikovaním Cauchyho odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} |a| = |a|.$$

Pre $|a| < 1$ daný rad konverguje absolútne, pre $|a| > 1$ rad diverguje. V prípade $|a| = 1$ rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie vo Vete 2 ($\lim_{n\to\infty} a^n \neq 0$, resp. neexistuje).

Funkcie v $\mathbb{C}$

Nech $\mathcal{D}$ je podmnožina v $\tilde{\mathbb{C}}$. Pod pojmom (komplexná) funkcia (komplexnej premennej) f budeme rozumieť priradenie, ktoré každému číslu $z \in \mathcal{D}$ priradí jednu alebo viac hodnôt $w \in \tilde{\mathbb{C}}$. Množina $\mathcal{D}$ sa nazýva definičný obor funkcie f a označuje sa $\mathcal{D}(f)$. Množina

$$\mathcal{H}(f) := \{w \in \tilde{\mathbb{C}},\ w = f(z),\ z \in \mathcal{D}(f)\}$$

sa nazýva obor hodnôt funkcie f. Ak je každému $z \in \mathcal{D}(f)$ priradená práve jedna hodnota $w = f(z) \in \mathcal{H}(f)$, potom hovoríme o jednoznačnej funkcii f. V opačnom prípade funkciu f označujeme ako mnohoznačnú. Vhodným zúžením oboru hodnôt $\mathcal{H}(f)$ mnohoznačnej funkcie f dostaneme jednoznačnú funkciu – tzv. jednoznačnú vetvu komplexnej funkcie f. Vo všeobecnosti teda komplexná funkcia komplexnej premennej nie je zobrazenie, pričom symbol $f(z)$ znamená podmnožinu v $\mathcal{H}(f)$. Inverznou funkciou k funkcii $f\ :\ w = f(z),\ z \in \mathcal{D}(f)$, rozumieme funkciu $f^{-1}\colon\ z = f^{-1}(w)$, ktorá každému $w \in \mathcal{H}(f)$ priradí práve tie $z \in \mathcal{D}(f)$, pre ktoré $w = f(z)$. Zrejme $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$. Okrem toho, $f(f^{-1}(w)) = w$, pre každé $w \in \mathcal{H}(f)$, avšak neplatí všeobecne $f^{-1}(f(z)) = z$, pre $z \in \mathcal{D}(f)$. Inverzná funkcia f^{-1} môže byť jednoznačná i mnohoznačná.

Nech f je funkcia. Ak $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, jedná sa o funkciu reálnej premennej, inak hovoríme o funkcii komplexnej premennej. V prípade $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{R}$ máme reálnu funkciu, inak (t.j., pre $\mathcal{H}(f) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$) máme komplexnú funkciu. Ak platí dokonca $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{C}$, potom hovoríme o konečnej (komplexnej) funkcii.
Nech f je konečná funkcia komplexnej premennej. Potom existujú jediné reálne funkcie $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ také, že pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathcal{D}(f) \cap \mathbb{C}$ platí

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y). \tag{21}$$

Funkcie u a v sa nazývajú reálna a imaginárna časť funkcie f, t.j.,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \tag{22}$$

Funkcia $\bar{f}$ definovaná $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$, $z \in \mathcal{D}(f)$, sa nazýva funkcia komplexne združená s f. Zrejme potom platí $\bar{f}(z) = u(x, y) - \mathrm{i}\, v(x, y)$ a

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2\mathrm{i}}, \quad z \in \mathcal{D}(f). \tag{23}$$

Limitu a spojitosť komplexnej funkcie f komplexnej premennej definujeme podobným spôsobom ako v reálnej analýze. Nech $M \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a z_0 je hromadný bod množiny M. Číslo $w_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ nazývame limitou funkcie f v bode z_0 vzhľadom na množinu M a píšeme

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0,$$

ak pre každé okolie $\mathcal{O}(w_0)$ bodu w_0 existuje rýdze okolie $\mathcal{O}^*(z_0)$ bodu z_0 také, že pre každé $z \in \mathcal{O}^*(z_0) \cap M$ platí $f(z) \in \mathcal{O}(w_0)$. V prípade $M = \mathcal{D}(f)$ dostávame limitu funkcie f v tradičnom slova zmysle, t.j.,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathcal{D}(f)}} f(z) = w_0.$$

Okrem toho platia relácie

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0, \tag{24}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to z_0} \bar{f}(z) = \overline{w_0}. \tag{25}$$

Funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathcal{D}(f)$, ak $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Pre spojitosť funkcie potom platia výsledky analogické s (24) a (25).

Príklad 11

Príkladom reálnych funkcií komplexnej premennej sú funkcie

$$w = \operatorname{Re} z, \quad w = |z|, \quad w = \arg z.$$

Jedná sa o jednoznačné funkcie. Funkcia $w = z^n$, pre $n \in \mathbb{N}$ pevné, je komplexná funkcia komplexnej premennej, kým funkcia $w = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, je komplexná funkcia reálnej premennej φ. Ďalej, funkcie

$$w = \operatorname{Arg} z, \quad w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ pevné},$$

sú príkladmi mnohoznačných komplexných funkcií komplexnej premennej. Prvá z nich je nekonečne-značná, druhá je n-značná. Zúžením oboru hodnôt prvej z nich dostaneme napríklad už zmienenú jednoznačnú funkciu $\tilde{w} = \arg z$. Jednoznačnou vetvou druhej funkcie je napríklad funkcia (porovnaj s (12))

$$\tilde{w} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\sin\frac{\arg z}{n}\right).$$

Príklad 12

Stanovme limitu

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$

V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Poznamenajme, že konvergencia $z = x + \mathrm{i}y \to 0$ je ekvivalentná s $x \to 0$ & $y \to 0$. Platí

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+\mathrm{i}y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+\mathrm{i}y}\,\frac{x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{xy}{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

Z reálnej analýzy funkcií dvoch premenných vieme ľahko ukázať, že limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

neexistujú. Podľa (24) potom neexistuje ani limita v zadaní príkladu.

Príklad 13

Vypočítajme limitu
$$\lim_{z\to 0}\frac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}.$$
V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme
$$\lim_{z\to 0}\frac{z\,\mathrm{Re}\,z}{|z|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+\mathrm{i}y)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\mathrm{i}\,\frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
V tomto prípade platí
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Preto podľa (24) limita v zadaní príkladu má hodnotu $0+\mathrm{i}0=0$.

Príklad 14

Zistime limitu
$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}}.$$
V limitovanej funkcii vykonáme algebraické úpravy (rozklad čitateľa na súčin)
$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} (z+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}.$$

Príklad 15

Rozhodnime o existencii limity
$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$
Dokážeme, že uvedená limita neexistuje. Nech z sa blíži k bodu $0 = 0 + \mathrm{i}0$ po reálnej osi, t.j., $z = x \in \mathbb{R}$. Potom $\bar{z}/z = \bar{x}/x = x/x = 1$, a $\lim_{z\to 0} \bar{z}/z = 1$ v tomto prípade. Ak z sa bude k 0 blížiť po imaginárnej osi, t.j., $z = \mathrm{i}y \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, potom platí $\bar{z}/z = -\mathrm{i}y/\mathrm{i}y = -1$, a v tomto prípade $\lim_{z\to 0} \bar{z}/z = -1$. Pri pohybe po dvoch rôznych cestách do bodu 0 sme dostali dve rôzne hodnoty limity. Preto daná limita neexistuje.

Obsah

Derivácia komplexnej funkcie

Definícia 1 (Komplexná diferencovateľnosť)

Nech G je otvorená podmnožina v $\mathbb{C}$ a f je konečná funkcia definovaná na G. Hovoríme, že f je komplexne diferencovateľná (monogénna) v bode $z_0 \in G$, ak existuje konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \left(\text{resp.} \ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right). \tag{26}$$

Limita v (26) sa nazýva derivácia funkcie f v bode z_0 a označuje sa $f'(z_0)$, resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

V komplexnej analýze sa teda nedefinuje nevlastná derivácia a derivácia v bode ∞. Z Definície 1 vyplýva, že funkcia $f : G \to \mathbb{C}$ je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in G$ práve vtedy, keď existuje komplexné číslo a s vlastnosťou

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ah}{h} = 0. \tag{27}$$

V tomto prípade $a = f'(z_0)$. Výraz ah sa nazýva diferenciál funkcie f v bode z_0 a označuje sa $\mathrm{d}f(z_0)$, resp. $\mathrm{d}f(z_0)(h)$.

Komplexná derivácia má podobné základné vlastnosti ako derivácia v reálnom obore. Vo všeobecnosti je však komplexná diferencovateľnosť podstatne silnejší koncept než reálna diferencovateľnosť.

Veta 6

Ak funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, potom je v bode z_0 spojitá.

Dôkaz.

Výsledok vyplýva z Definície 1 a z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)+f(z_0)\right) = f'(z_0)\cdot 0+f(z_0) = f(z_0).$$

■

Poznámka 2

Poznamenajme, že podobne ako v reálnom obore spojitosť funkcie nezaručuje komplexnú diferencovateľnosť funkcie. Túto skutočnosť ilustruje Príklad 17.

Veta 7 (Základné vlastnosti)

(i) *Ak funkcie f, g sú komplexne diferencovateľné v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, potom aj funkcie $f \pm g$, $f \cdot g$ a f/g (ak $g(z_0) \neq 0$) sú komplexne diferencovateľné v bode z_0 a platí*

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0),$$

$$(f/g)'(z_0) = \left[f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)\right] / [g(z_0)]^2.$$

(ii) *Ak funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkcia g je komplexne diferencovateľná v bode $f(z_0)$, potom aj zložená funkcia $g \circ f$ je komplexne diferencovateľná v z_0 a platí $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.*

(iii) *Ak funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ a prostá na okolí bodu z_0, potom inverzná funkcia f^{-1} je komplexne diferencovateľná v bode $w_0 = f(z_0)$ a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = 1/f'(z_0).$$

V nasledujúcom budeme pracovať s algebraickým tvarom komplexných čísiel a funkcií, t.j., podľa (21) pre dané $z \in \mathbb{C}$ a danú komplexnú funkciu f máme

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{a} \quad f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \quad \text{pre } x, y \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Pripomeňme, že jednoznačne určené reálne funkcie u, v sú podľa (22) reálnou a imaginárnou časťou funkcie f.

Veta 8 (Nutná podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Nech funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom funkcie u, v v (28) spĺňajú tzv. Cauchyho–Riemannove rovnice (podmienky)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{29}$$

Pre deriváciu $f'(z_0)$ potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{30}$$

Náčrt dôkazu.

Ak f je komplexne diferencovateľná v bode z_0, potom podľa Definície 1 je f definovaná na nejakom okolí bodu z_0 a existuje limita v (26). Hodnota tejto limity nezávisí na ceste, po ktorej sa s premenlivým bodom z blížime do bodu z_0. Uvažujme napríklad $z = x + \mathrm{i}y_0$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $x \to x_0$. Do $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ sa teda blížime po priamke $y = y_0$. Platí potom

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z = x + \mathrm{i}y_0 \\ x \to x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + \mathrm{i}y_0) - f(x_0 + \mathrm{i}y_0)}{x - x_0}.$$

Pomocou funkcií u, v sa posledná limita dá rozpísať do tvaru

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + \mathrm{i}v(x, y_0) - u(x_0, y_0) - \mathrm{i}v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \mathrm{i}\, \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

Limitovaním posledného výrazu dostaneme prvú rovnosť v (30). Podobným spôsobom odvodíme i druhé vyjadrenie derivácie $f'(z_0)$ v (30), kde uvažujeme $z = x_0 + \mathrm{i}y$ s $y \in \mathbb{R}$ a $y \to y_0$ (priamka $x = x_0$). Porovnaním reálnych a imaginárnych častí vyjadrení v (30) dostaneme rovnosti (29). ■

Poznámka 3

Z Vety 8 vyplýva, že nutnými podmienkami existencie komplexnej derivácie $f'(z_0)$ je existencia prvých parciálnych derivácií reálnych funkcií u, v v bode $[x_0, y_0]$ a platnosť Cauchyho–Riemannovych podmienok (29) v bode $[x_0, y_0]$. Ako však ukazuje nasledujúca veta, nie sú to zároveň aj postačujúce podmienky.

Veta 9 (Nutná a postačujúca podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď reálne funkcie u, v v (28) sú diferencovateľné v $[x_0, y_0]$ a platia rovnice v (29).

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina. Hovoríme, že komplexná funkcia f je komplexne diferencovateľná na G, ak $f'(z)$ existuje v každom bode $z \in G$. Z Vety 9 vyplýva, že ak funkcie u, v v (28) majú spojité I. parciálne derivácie na G a spĺňajú podmienky (29) na G, potom f je komplexne diferencovateľná v G.

Cauchyho–Riemannove podmienky (29) výrazne obmedzujú triedu reálnych diferencovateľných funkcií u, v, ktoré môžu byť reálnymi, resp. imaginárnymi časťami komplexne diferencovateľných funkcií. Ak totiž funkcia $f = u + iv$ je komplexne diferencovateľná v otvorenej množine $G \subseteq \mathbb{C}$ a funkcie u, v majú naviac spojité i druhé parciálne derivácie na G, potom u, v sú riešeniami tzv. Laplaceovej rovnice na G, t.j., platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } G. \tag{31}$$

Riešenia Laplaceovej rovnice sa označujú ako harmonické funkcie. Reálne a imaginárne časti komplexne diferencovateľných funkcií v G musia preto byť nutne harmonickými funkciami v G. Neskôr ukážeme, že požiadavka existencie a spojitosti druhých (dokonca i všetkých vyšších) parciálnych derivácií funkcií u, v na G je prekvapivo prirodzene zabudovaná v koncepte komplexnej derivácie funkcie f na množine G.

Veta 10

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť. Potom ku každej harmonickej funkcii u (resp. v) na G existuje funkcia f komplexne diferencovateľná na G tak, že $u = \mathrm{Re}\, f$ (resp. $v = \mathrm{Im}\, f$) na G.

Príklad 16

Dokážme, že pre každé pevné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Označme $f(z) = z^n$ a nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je zafixované. Podľa Definície 1 máme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)$$
$$= nz_0^{n-1}.$$

Príklad 17

Funkcia $f(z) = \bar{z} = x - iy$ je síce spojitá v celej komplexnej rovine, ale nie je nikde v $\mathbb{C}$ komplexne diferencovateľná, pretože limita

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0} + \bar{h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\bar{h}}{h}$$

neexistuje pre žiadne $z_0 \in \mathbb{C}$ (porovnaj s Príkladom 15).

Príklad 18

Rozhodnime o existencii derivácie funkcie (ako funkcie v $\mathbb{C}$)

$$f(z) = 1/z$$

overením Cauchyho–Riemannovych rovností (29). Zrejme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Oddelíme reálnu a imaginárnu časť funkcie f

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Platí $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$, $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, a ďalej

$$u'_x = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2, \qquad u'_y = (-2xy)/(x^2 + y^2)^2,$$
$$v'_x = (2xy)/(x^2 + y^2)^2, \qquad v'_y = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2,$$

Funkcie u, v sú diferencovateľné na $\mathcal{D}(f)$ a platia rovnosti (29) na $\mathcal{D}(f)$. Teda podľa Vety 9 funkcia f je komplexne diferencovateľná na $\mathcal{D}(f)$ a platí

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = u'_x + \mathrm{i}v'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \mathrm{i}\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(x - \mathrm{i}y)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{|z|^4} = -\frac{1}{z^2}.$$

Príklad 19

Určme komplexne diferencovateľnú funkciu f, ktorá spĺňa

$$\text{Re}\, f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1, \quad f(0) = 1.$$

Funkcia $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ je harmonická v $\mathbb{C}$, nakoľko

$$\begin{aligned} u'_x &= 3x^2 - 3y^2 + 6x, \quad u''_{xx} = 6x + 6, \\ u'_y &= -6xy - 6y, \quad u''_{yy} = -6x - 6, \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^2.$$

Podľa Vety 10 je funkcia u reálnou časťou istej funkcie f, ktorá je komplexne diferencovateľná na $\mathbb{C}$. Jej imaginárnu časť v určíme z podmienok (29)

$$v'_x = -u'_y = 6xy + 6y, \quad v'_y = u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x.$$

Máme teda určiť kmeňovú funkciu v pre dvojicu $6xy + 6y$ a $3x^2 - 3y^2 + 6x$.

Príklad 19

Postupujúc štandardným spôsobom, dostaneme

$$v(x,y) = -y^3 + 3x^2y + 6xy + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Keďže $f(0) = 1$, platí $v(0,0) = \operatorname{Im} f(0) = 0$, a teda $K = 0$. Funkcia f má tvar

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 + \mathrm{i}\,(-y^3 + 3x^2y + 6xy).$$

Nakoniec, ak dosadeníme za reálne premenné x, y výrazy

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2\mathrm{i},$$

dostaneme vyjadrenie hodnoty $f(z)$ pomocou komplexnej premennej z. Po úpravách získame finálny predpis

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1.$$

Holomorfné funkcie

Definícia 2 (Holomorfná funkcia)

Hovoríme, že funkcia f je holomorfná (analytická, regulárna) v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, ak f má deriváciu na nejakom okolí bodu z_0. Funkcia f je holomorfná na množine $G \subseteq \mathbb{C}$, ak je holomorfná v každom bode $z \in G$.

Pojem holomorfnosti funkcie (na rozdiel od komplexnej diferencovateľnosti) je možné zaviesť i pre nevlastný bod ∞. Konkétne, funkcia $f(z)$ sa označuje ako holomorfná v bode ∞, ak funkcia $f(1/z)$ je holomorfná v bode $z_0 = 0$.

Príklad 20

Z predchádzajúcich príkladov (Príklady 16, 17 a 18) vyplýva, že funkcia $f(z) = z^n$ je holomorfná v celej komplexnej rovine, funkcia $g(z) = \bar{z}$ nie je holomorfná v žiadnom bode z $\tilde{\mathbb{C}}$ a funkcia $h(z) = 1/z$ je holomorfná na $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Príklad 21

Funkcia $f(z) = |z|^2$ nie je holomorfná v žiadnom bode z $\tilde{\mathbb{C}}$, hoci je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = 0$, ako sa možno ľahko presvedčiť.

Veta 11

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Funkcia $f : G \to \mathbb{C}$ je konštantná na G práve vtedy, keď je holomorfná na G a $f'(z) = 0$ pre každé $z \in G$.

Dôkaz.

Implikácia "$\Rightarrow$" vyplýva priamo z Definícií 1 a 2. Naopak, nech f je holomorfná na G s $f'(z) = 0$ pre každé $z \in G$. Funkcie u, v z (28) podľa (30) spĺňajú

$$u'_x(x,y) = 0 = v'_x(x,y), \quad v'_y(x,y) = 0 = -u'_y(x,y) \quad \text{pre každé } [x,y] \in G,$$

z čoho vyplýva, že funkcie u, v sú konštantné na oblasti G. To znamená, že i funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je konštantná na G. ■

Dôsledok 1

Nech f, g sú funkcie holomorfné na oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom platia tvrdenia.

(i) *Rovnosť $f' \equiv g'$ platí na G práve vtedy, keď $f \equiv g + K$ na G, kde K je (komplexná) konštanta.*

(ii) *Funkcia f je polynóm stupňa menšieho ako n na G práve vtedy, keď $f^{(n)} \equiv 0$ na G.*

Komplexné funkcionálne rady

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je neprázdna množina a nech $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na G. Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ definovaná

$$s_k(z) := \sum_{n=1}^{k} f_n(z), \quad z \in G, \quad k \in \mathbb{N},$$

sa nazýva (nekonečný) funkcionálny rad s členmi f_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, resp. $\sum f_n(z)$. Rozlišujeme dva typy konvergencie funkcionálnych postupností a radov.

- Bodová konvergencia na G – pre každé $z_0 \in G$ je číselná postupnosť $\{f_n(z_0)\}$ (číselný rad $\sum f_n(z_0)$) konvergentná(ý). Funkcia f s vlastnosťou

  $$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \Big(f(z) = \sum f_n(z)\Big) \quad \text{pre každé } z \in G,$$

  sa nazýva limitná funkcia postupnosti (súčet radu). Symbolicky značíme

  $$f_n \to f \quad \Big(\sum f_n \to f\Big) \quad \text{na } G.$$

- Rovnomerná konvergencia na G – zhruba povedané, konvergencia k limitnej funkcii (k súčtu) nezávisí na premennej z. Presnejšie, ak f je limitná funkcia postupnosti $\{f_n\}$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n \geq n_\varepsilon \text{ a pre každé } z \in G.$$

  Rad $\sum f_n(z)$ konverguje rovnomerne k súčtu f na G, ak jeho príslušná postupnosť čiastočných súčtov $\{s_k\}$ konverguje rovnomerne k f na G. Symbolicky zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$ ($\sum f_n \rightrightarrows f$) na G.

Veta 12 (Cauchyho–Bolzanove kritériá rovnomernej konvergencie)

Postupnosť $\{f_n\}$ konverguje rovnomerne na G práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad \textit{pre každé } n, m \geq n_\varepsilon \textit{ a pre každé } z \in G.$$

Rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na G práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\left|\sum_{k=n}^{m+n} f_k(z)\right| < \varepsilon \quad \textit{pre každé } n \geq n_\varepsilon,\ m \in \mathbb{N}, \textit{ a pre každé } z \in G.$$

Cauchyho–Bolzanove kritéria udávajú nutné a zároveň postačujúce podmienky rovnomernej konvergencie postupnosti (radu) funkcií. Pre praktické výpočty sa však s výhodou využíva nasledujúce postačujúce kritérium.

Veta 13 (Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie)

Ak pre rad $\sum f_n$ *existuje konvergentný reálny číselný rad* $\sum \alpha_n$ *s vlastnosťou*

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N} \text{ a pre každé } z \in G,$$

potom rad $\sum f_n$ *konverguje rovnomerne na množine* G*.*

Reálny číselný rad $\sum \alpha_n$ vo Vete 13 sa nazýva majorantný rad (majoranta) pre funkcionálny rad $\sum f_n$.

Veta 14

Nech $\{f_n\}$ *je postupnosť funkcií spojitých na množine* $G \subseteq \mathbb{C}$*. Ak rad* $\sum f_n$ *konverguje rovnomerne na* G *k súčtu* f*, potom funkcia* f *je spojitá na* G*.*