Komplexná analýza

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Obor komplexných čísiel

Pod pojmom komplexné číslo a rozumieme usporiadanú dvojicu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Prvá zložka α tejto dvojice sa nazýva reálna časť komplexného čísla a, druhá zložka β sa nazýva imaginárna časť komplexného čísla a, označujeme $\alpha = \operatorname{Re} a$ a $\beta = \operatorname{Im} a$. Definujeme sčítanie a násobenie komplexných čísiel

$$(\alpha,\ \beta) + (\gamma,\ \delta) := (\alpha + \gamma,\ \beta + \delta),$$
$$(\alpha,\ \beta) \cdot (\gamma,\ \delta) := (\alpha\gamma - \beta\delta,\ \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Sčítanie i násobenie komplexných čísiel sú asociatívne a komutatívne binárne operácie a pre každú trojicu a, b, c komplexných čísiel platí distributívny zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Pre úplnosť definujeme násobenie komplexného čísla reálnym číslom

$$r(\alpha,\ \beta) := (r\alpha,\ r\beta), \quad r \in \mathbb{R}.$$

- Nula – $(0, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j.,

$$(\alpha,\ \beta) + (0, 0) = (0, 0) + (\alpha,\ \beta) = (\alpha,\ \beta).$$

- Jednotka – $(1, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na násobenie, t.j.,

$$(\alpha,\ \beta) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (\alpha,\ \beta) = (\alpha,\ \beta).$$

- Opačné číslo ku komplexnému číslu $a = (\alpha,\, \beta)$

$$-a := (-\alpha,\, -\beta)$$

  Komplexné číslo $-a$ je jediné riešenie rovnice

$$a + z = (0, 0).$$

- Inverzné číslo k nenulovému komplexnému číslu $a = (\alpha, \beta)$

$$a^{-1} := \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},\, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

  Komplexné číslo a^{-1} je jediné riešenie rovnice

$$a \cdot z = (1, 0).$$

- Odčítanie komplexných čísiel a, b definujeme $a - b := a + (-b)$.
- Delenie komplexných čísiel $a, b,\ b \neq (0, 0)$, definujeme $a/b := a \cdot b^{-1}$.

Množina všetkých komplexných čísiel sa označuje $\mathbb{C}$. Algebraická štruktúra $(\mathbb{C},\, +,\, \cdot)$ je teleso, ktoré sa nedá usporiadať (na rozdiel od $(\mathbb{R},\, +,\, \cdot)$).

Algebraický tvar komplexného čísla

Podmnožina komplexných čísiel

$$\mathcal{R} := \{a \in \mathbb{C},\ a = (\alpha,\, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

je podtelesom telesa $\mathbb{C}$ izomorfným s telesom $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísiel. Preto je možné množiny $\mathcal{R}$ a $\mathbb{R}$, ako algebraické štruktúry, stotožniť. To znamená, že v množine $\mathbb{C}$ budeme klásť $\alpha = (\alpha,\, 0)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Ďalej, komplexné číslo $(0, 1)$ sa označuje symbolom i, t.j., $\mathrm{i} = (0, 1)$, a nazýva sa imaginárna jednotka. Platí $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$. Tieto označenia potom umožňujú vyjadriť komplexné číslo $a = (\alpha, \beta)$ v tzv. algebraickom tvare

$$a = (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, 0) + (0,\, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha + \mathrm{i}\beta. \qquad (1)$$

Komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta = 0$ (teda s $\operatorname{Im} a = 0$) sa označuje ako reálne (komplexné) číslo, kým komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta \neq 0$ (teda s $\operatorname{Im} a \neq 0$) sa nazýva imaginárne (komplexné) číslo. Imaginárne číslo s nulovou reálnou časťou sa nazýva rýdzo imaginárne (komplexné) číslo. Komplexne združené číslo $\bar{a}$ k číslu $a = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ je definované ako $\bar{a} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Absolútna hodnota (veľkosť) $|a|$ komplexného čísla $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ sa definuje

$$|a| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{2}$$

Reálne číslo $|a|$ vyjadruje geometrickú vzdialenosť bodu $[\alpha, \beta]$ od bodu $[0, 0]$ v reálnej rovine. Všeobecne, pre $a, b \in \mathbb{C}$ reálne číslo $|a - b|$ vyjadruje vzájomnú vzdialenosť bodov $[\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a]$ a $[\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b]$ v reálnej rovine.

Poznámka 1 (Základné vlastnosti)

Nech $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\bar{\bar{a}} = a, \quad \overline{a_1 \pm a_2} = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2, \quad \overline{a_1 a_2} = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \overline{a_1/a_2} = \bar{a}_1/\bar{a}_2$, ak $a_2 \neq 0$.
- $a\bar{a} = |a|^2, \quad |a_1 a_2| = |a_1||a_2|, \quad |a_1/a_2| = |a_1|/|a_2|$, ak $a_2 \neq 0$.
- trojuholníkové nerovnosti $||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|, \quad |\operatorname{Im} a| \leq |a|$.
- $$\operatorname{Re} a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \operatorname{Im} a = \frac{a - \bar{a}}{2\mathrm{i}}.$$
- $\operatorname{Re}(a_1 \pm a_2) = \operatorname{Re} a_1 \pm \operatorname{Re} a_2, \quad \operatorname{Im}(a_1 \pm a_2) = \operatorname{Im} a_1 \pm \operatorname{Im} a_2$.

Komplexná (Gaussova) rovina

Prirodzeným modelom množiny $\mathbb{C}$ komplexných čísiel je (euklidovská) rovina – komplexná (Gaussova) rovina. Každému komplexnému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ je priradený bod v rovine so súradnicami $[x, y]$. Naopak, každému bodu $[x, y]$ roviny odpovedá práve jedno komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$. Ďalej budeme preto pre jednoduchosť stotožnovať body roviny s komplexnými číslami. Vzdialenosť (metrika) sa v množine $\mathbb{C}$ definuje pomocou absolútnej hodnoty komplexného čísla zavedenej v (2), t.j., vzdialenosť dvoch komplexných čísiel z_1 a z_2 je definovaná $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$.
Ako je to s pojmom "komplexné" nekonečno? Pre množinu $\mathbb{C}$ komplexných čísiel sa definuje iba jedno "nekonečno". Konkrétne, k množine $\mathbb{C}$ sa formálne pridá jeden prvok, ktorý sa označuje symbolom ∞, spĺňajúci vlastnosti

$$\infty = -\infty = |\infty|, \quad \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$z + \infty = \infty, \quad z/\infty = 0, \quad \infty/z = \infty \quad \text{pre } z \in \mathbb{C},$$
$$z \cdot \infty = \infty, \quad z/0 = \infty, \quad \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nedefinujú sa výrazy $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Množina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sa spolu s danými algebraickými operáciami označuje $\tilde{\mathbb{C}}$ a nazýva sa rozšírená (uzavretá) komplexná rovina alebo tiež rozšírená (uzavretá) Gaussova rovina.

Goniometrický (polárny) tvar komplexného čísla

S modelom komplexnej roviny úzko súvisí tzv. goniometrický (polárny) tvar komplexných čísiel. Každé nenulové komplexné číslo z je možné vyjadriť v tvare

$$z = |z| \, (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi), \tag{3}$$

kde φ je argument komplexného čísla z definovaný rovnicami

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{4}$$

Argument φ nie je určený jednoznačne (ak φ je argument z, potom i $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je argument z). Množina všetkých argumentov daného komplexného čísla sa označuje $\operatorname{Arg} z$ (je to tzv. mnohoznačná funkcia premennej z). Symbol $\arg z$ bude označovať základný (hlavný) argument komplexného čísla z, t.j., argument spĺňajúci $-\pi \leq \arg z < \pi$. Základný argument $\arg z$ je pre dané z určený jednoznačne. Platí

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje i v tvare $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$.

Zavedenie goniometrického tvaru v (3) umožňuje efektívne násobiť a deliť komplexné čísla. Konkrétne, ak

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1), \qquad z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

sú dve komplexné čísla a φ_1 a φ_2 sú ich ľubovoľné argumenty, potom platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\qquad\qquad + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= |z_1||z_2|\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnosti (6) potom vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{a} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \tag{7}$$

ako aj tzv. Moivreov vzorec na výpočet n-tej mocniny komplexného čísla z

$$z^n = |z|^n\,[\cos(n\arg z) + \mathrm{i}\sin(n\arg z)], \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Okrem toho z relácií (7) vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z \quad \text{a} \quad \arg(z^n) \equiv n\arg z \pmod{2\pi}. \tag{9}$$

Podobne, pre podiel z_1/z_2, $z_2 \neq 0$, platí

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2}\,\frac{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Potom máme

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \tag{11}$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina zo z definovaná ako

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{12}$$

kde $k = 0, \ldots, n-1$. Pre pevné n sa teda jedná o mnohoznačnú funkciu (premennej z), pričom pre každé $z \in \mathbb{C}$ existuje práve n jeho n-tých odmocnín.

Výraz $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sa obvykle označuje symbolom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, t.j.,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{13}$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ potom platí

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{14}$$

Zápis (14) sa nazýva exponenciálny tvar komplexného čísla z. Pre každé φ, φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1, \quad \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 1/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{15}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}, \tag{16}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \tag{17}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Neskôr ukážeme, že výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ zavedený v (13) je rozšírením exponenciálnej funkcie e^x do oboru komplexných čísiel.

Príklad 1

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$1 + \mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z potom spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = 1/\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = 1/\sqrt{2}.$$

Riešenie tejto sústavy je napr. $\varphi = 9\pi/4$. Potom platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(9\pi/4) + \mathrm{i}\sin(9\pi/4)].$$

Základný argument čísla z je $\arg z = \pi/4$ a podobne platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)].$$

Príklad 2

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$-2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = -2\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = -\sqrt{3}/2, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = -1/2.$$

Základný argument čísla z je $\arg z = -5\pi/6$ a platí

$$z = 4\left[\cos\left(-5\pi/6\right) + \mathrm{i}\sin\left(-5\pi/6\right)\right].$$

Príklad 3

Vypočítajte

$$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{15}.$$

Použijeme Moivreov vzorec (8). Komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ prepíšeme do goniometrického tvaru. Platí $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$, a teda

$$z = 2\,[\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)].$$

Potom podľa (8) máme

$$z^{15} = 2^{15}\,[\cos(15\pi/3) + \mathrm{i}\sin(15\pi/3)] = 2^{15}\,[\cos(5\pi) + \mathrm{i}\sin(5\pi)] = -2^{15}.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme získali klasickým roznásobením podľa binomickej vety.

Príklad 4

Vypočítajme v $\mathbb{C}$

$$\sqrt[3]{-8}.$$

Podľa (12) existujú práve 3 komplexné tretie odmocniny z čísla $z=-8$. Goniometrický tvar čísla z je

$$z = 8\,[\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)].$$

Podľa (12) platí

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi+2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi+2k\pi}{3}\right)\right],$$

pričom $k=0,1,2.$ Postupne dostávame

$$k=0 \;\longrightarrow\; \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = 1-\mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$k=1 \;\longrightarrow\; \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1+\mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$k=2 \;\longrightarrow\; \sqrt[3]{8}\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2.$$

Obsah

Postupnosti v $\mathbb{C}$

Nech $r \in \mathbb{R}^+$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Otvoreným kruhom $K(z_0, r)$ so stredom v bode z_0 a s polomerom r rozumieme množinu $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}$. Množina $K(z_0, r)$ sa často označuje aj ako r-okolie bodu z_0. Ak $z_0 = \infty$, definujeme $K(\infty, r) := \{z \in \tilde{\mathbb{C}},\ |z| > 1/r\}$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísiel. Komplexné číslo $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé ε-okolie bodu a_0 existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in K(a_0, \varepsilon)$ pre každý index $n \geq n_\varepsilon$. Potom píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ alebo aj $a_n \to a_0$.

Veta 1

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$ a $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$. Potom $a_n \to a_0$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a_0| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathit{Re}\, a_n = \mathit{Re}\, a_0 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \mathit{Im}\, a_n = \mathit{Im}\, a_0. \tag{19}$$

V tomto prípade platí i $\overline{a_n} \to \overline{a_0}$. Podobne, $a_n \to \infty$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty, \quad \textit{resp.}, \quad \lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = 0. \tag{20}$$

Číselné rady v $\mathbb{C}$

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$. Postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ (tzv. postupnosť čiastočných súčtov) definovaná ako $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$ sa nazýva nekonečný rad s členmi a_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, resp. $\sum a_n$. Rad $\sum a_n$ konverguje (resp., je konvergentný), ak existuje konečná limita postupnosti $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Túto limitu potom označujeme ako súčet s radu a píšeme $s = \sum a_n$. V opačnom prípade rad $\sum a_n$ diverguje (resp., je divergentný).

Veta 2

Nech $\sum a_n$, $\sum b_n$ sú konvergentné rady a $a, b \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(nutná podmienka konvergencie radu).*
- *Rad $\sum \overline{a_n}$ konverguje so súčtom $\sum \overline{a_n} = \overline{\sum a_n}$.*
- *Rad $\sum (aa_n + bb_n)$ konverguje a $\sum (aa_n + bb_n) = a\sum a_n + b\sum b_n$.*

Veta 3

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje každý z reálnych radov $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\, a_n$, pričom platí $\sum a_n = \sum \mathrm{Re}\, a_n + i \sum \mathrm{Im}\, a_n$.

Komplexný rad $\sum a_n$ sa nazýva absolútne konvergentný, ak rad $\sum |a_n|$ je konvergentný. Každý absolútne konvergentný rad je i konvergentný a platí

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|.$$

Ak $\sum a_n$ konverguje, ale rad $\sum |a_n|$ diverguje, potom hovoríme, že rad $\sum a_n$ konverguje neabsolútne (relatívne). Platia nasledujúce výsledky.

Veta 4

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď každý z reálnych radov $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ konverguje absolútne.

Veta 5 (Riemannova veta o prerovnaní absolútne konvergentného radu)

Ak komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne, potom každé prerovnanie tohto radu konverguje absolútne s rovnakým súčtom, t.j., platí

$$\sum a_{\tau(n)} = \sum a_n$$

pre každú permutáciu τ množiny $\mathbb{N}$ (t.j., pre každú bijekciu $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Pri vyšetrovaní (absolútnej) konvergencie komplexných radov môžeme aplikovať mnohé kritériá využívané v reálnej analýze.

- Porovnávacie kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\sum b_n$ je konvergentný reálny rad, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne.
- D'Alembertovo podielové kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvášť, ak existuje $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ ($q > 1$) rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- Cauchyho odmocninové kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvášť, ak existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ ($q > 1$) rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- Cauchyho integrálne kritérium – ak rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| = f(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, nerastúca a spojitá funkcia, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď nevlastný integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Príklad 5

Stanovme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}.$$

Nájdeme reálnu a imaginárnu časť príslušnej postupnosti. Podľa Príkladu 1 platí

$$\begin{aligned}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!} &= \frac{\left(\sqrt{2}\left[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)\right]\right)^n}{n!} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!} + \mathrm{i}\,\frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}.\end{aligned}$$

Teda máme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}.$$

Keďže platí

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right),$$

podľa Vety 1 limita v zadaní príkladu existuje a je rovná $0 + \mathrm{i}0 = 0$.

Príklad 6

Dokážme
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n} = 0.$$
Uvedený výsledok vyplýva z Vety 1, pretože platí
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathrm{i}|^n}{n2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = 0.$$

Príklad 7

Nájdime limitu
$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}.$$
Táto limita existuje a je nevlastná, pretože platí
$$\lim_{n\to\infty} \left| n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \right| = \lim_{n\to\infty} n \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$
Pri výpočte sme využili prvú rovnosť v (15), t.j., $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right| = 1$. Podľa Vety 1 potom
$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} = \infty.$$

Príklad 8

Nájdime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mathrm{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2}.$$

V danom rade oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 + \mathrm{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1 + \mathrm{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Keďže z reálnej analýzy máme

$$\sum 1/n^2 = \pi^2/6, \quad \sum (-1)^{n-1}/n = \ln 2,$$

podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu a platí

$$\sum \frac{1 + \mathrm{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathrm{i} \ln 2.$$

Príklad 9

Vyšetrime konvergenciu radu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}.$$
Oddelením reálnej a imaginárnej časti daného radu dostaneme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \begin{cases} (-1)^k/(2k), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1, \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}/(2k-1), & n = 2k-1. \end{cases}$$

Obidva reálne rady $\sum$ Re a $\sum$ Im konvergujú (podľa Leibnizovho kritéria), a preto podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu.

Príklad 10

Vyšetrime konvergenciu radov

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+\mathrm{i})^n}{3^n}, \quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad a \in \mathbb{C}.$$

a) Rad konverguje absolútne podľa D'Alembertovho kritéria, nakoľko

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(1+\mathrm{i})^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(1+\mathrm{i})^n}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+\mathrm{i})}{3n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Aplikovaním Cauchyho odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} |a| = |a|.$$

Pre $|a| < 1$ daný rad konverguje absolútne, pre $|a| > 1$ rad diverguje. V prípade $|a| = 1$ rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie vo Vete 2 ($\lim_{n\to\infty} a^n \neq 0$, resp. neexistuje).

Funkcie v $\mathbb{C}$

Nech $\mathcal{D}$ je podmnožina v $\tilde{\mathbb{C}}$. Pod pojmom (komplexná) funkcia (komplexnej premennej) f budeme rozumieť priradenie, ktoré každému číslu $z \in \mathcal{D}$ priradí jednu alebo viac hodnôt $w \in \tilde{\mathbb{C}}$. Množina $\mathcal{D}$ sa nazýva definičný obor funkcie f a označuje sa $\mathcal{D}(f)$. Množina

$$\mathcal{H}(f) := \{w \in \tilde{\mathbb{C}},\ w = f(z),\ z \in \mathcal{D}(f)\}$$

sa nazýva obor hodnôt funkcie f. Ak je každému $z \in \mathcal{D}(f)$ priradená práve jedna hodnota $w = f(z) \in \mathcal{H}(f)$, potom hovoríme o jednoznačnej funkcii f. V opačnom prípade funkciu f označujeme ako mnohoznačnú. Vhodným zúžením oboru hodnôt $\mathcal{H}(f)$ mnohoznačnej funkcie f dostaneme jednoznačnú funkciu – tzv. jednoznačnú vetvu komplexnej funkcie f. Vo všeobecnosti teda komplexná funkcia komplexnej premennej nie je zobrazenie, pričom symbol $f(z)$ znamená podmnožinu v $\mathcal{H}(f)$. Inverznou funkciou k funkcii $f\ :\ w = f(z),\ z \in \mathcal{D}(f)$, rozumieme funkciu $f^{-1}\colon\ z = f^{-1}(w)$, ktorá každému $w \in \mathcal{H}(f)$ priradí práve tie $z \in \mathcal{D}(f)$, pre ktoré $w = f(z)$. Zrejme $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$. Okrem toho, $f(f^{-1}(w)) = w$, pre každé $w \in \mathcal{H}(f)$, avšak neplatí všeobecne $f^{-1}(f(z)) = z$, pre $z \in \mathcal{D}(f)$. Inverzná funkcia f^{-1} môže byť jednoznačná i mnohoznačná.

Nech f je funkcia. Ak $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, jedná sa o funkciu reálnej premennej, inak hovoríme o funkcii komplexnej premennej. V prípade $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{R}$ máme reálnu funkciu, inak (t.j., pre $\mathcal{H}(f) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$) máme komplexnú funkciu. Ak platí dokonca $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{C}$, potom hovoríme o konečnej (komplexnej) funkcii.
Nech f je konečná funkcia komplexnej premennej. Potom existujú jediné reálne funkcie $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ také, že pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathcal{D}(f) \cap \mathbb{C}$ platí

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y). \tag{21}$$

Funkcie u a v sa nazývajú reálna a imaginárna časť funkcie f, t.j.,

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z). \tag{22}$$

Funkcia $\bar{f}$ definovaná $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$, $z \in \mathcal{D}(f)$, sa nazýva funkcia komplexne združená s f. Zrejme potom platí $\bar{f}(z) = u(x,y) - \mathrm{i}\, v(x,y)$ a

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2\mathrm{i}}, \quad z \in \mathcal{D}(f). \tag{23}$$

Limitu a spojitosť komplexnej funkcie f komplexnej premennej definujeme podobným spôsobom ako v reálnej analýze. Nech $M \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a z_0 je hromadný bod množiny M. Číslo $w_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ nazývame limitou funkcie f v bode z_0 vzhľadom na množinu M a píšeme

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0,$$

ak pre každé okolie $\mathcal{O}(w_0)$ bodu w_0 existuje rýdze okolie $\mathcal{O}^*(z_0)$ bodu z_0 také, že pre každé $z \in \mathcal{O}^*(z_0) \cap M$ platí $f(z) \in \mathcal{O}(w_0)$. V prípade $M = \mathcal{D}(f)$ dostávame limitu funkcie f v tradičnom slova zmysle, t.j.,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathcal{D}(f)}} f(z) = w_0.$$

Okrem toho platia relácie

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0, \tag{24}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to z_0} \bar{f}(z) = \overline{w_0}. \tag{25}$$

Funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathcal{D}(f)$, ak $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Pre spojitosť funkcie potom platia výsledky analogické s (24) a (25).

Príklad 11

Príkladom reálnych funkcií komplexnej premennej sú funkcie

$$w = \mathrm{Re}\, z, \quad w = |z|, \quad w = \arg z.$$

Jedná sa o jednoznačné funkcie. Funkcia $w = z^n$, pre $n \in \mathbb{N}$ pevné, je komplexná funkcia komplexnej premennej, kým funkcia $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, je komplexná funkcia reálnej premennej φ. Ďalej, funkcie

$$w = \mathrm{Arg}\, z, \quad w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ pevné},$$

sú príkladmi mnohoznačných komplexných funkcií komplexnej premennej. Prvá z nich je nekonečne-značná, druhá je n-značná. Zúžením oboru hodnôt prvej z nich dostaneme napríklad už zmienenú jednoznačnú funkciu $\tilde{w} = \arg z$. Jednoznačnou vetvou druhej funkcie je napríklad funkcia (porovnaj s (12))

$$\tilde{w} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\arg z}{n}\right).$$

Príklad 12

Stanovme limitu
$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$
V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Poznamenajme, že konvergencia $z = x + \mathrm{i}y \to 0$ je ekvivalentná s $x \to 0$ & $y \to 0$. Platí

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+\mathrm{i}y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+\mathrm{i}y}\,\frac{x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Z reálnej analýzy funkcií dvoch premenných vieme ľahko ukázať, že limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

neexistujú. Podľa (24) potom neexistuje ani limita v zadaní príkladu.

Príklad 13

Vypočítajme limitu

$$\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}.$$

V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+\mathrm{i}y)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\, \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

V tomto prípade platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Preto podľa (24) limita v zadaní príkladu má hodnotu $0 + \mathrm{i}0 = 0$.

Príklad 14

Zistime limitu
$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}}.$$
V limitovanej funkcii vykonáme algebraické úpravy (rozklad čitateľa na súčin)
$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} (z+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}.$$

Príklad 15

Rozhodnime o existencii limity
$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$
Dokážeme, že uvedená limita neexistuje. Nech z sa blíži k bodu $0 = 0 + \mathrm{i}0$ po reálnej osi, t.j., $z = x \in \mathbb{R}$. Potom $\bar{z}/z = \bar{x}/x = x/x = 1$, a $\lim_{z\to 0} \bar{z}/z = 1$ v tomto prípade. Ak z sa bude k 0 blížiť po imaginárnej osi, t.j., $z = \mathrm{i}y \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, potom platí $\bar{z}/z = -\mathrm{i}y/\mathrm{i}y = -1$, a v tomto prípade $\lim_{z\to 0} \bar{z}/z = -1$. Pri pohybe po dvoch rôznych cestách do bodu 0 sme dostali dve rôzne hodnoty limity. Preto daná limita neexistuje.

Obsah

Derivácia komplexnej funkcie

Definícia 1 (Komplexná diferencovateľnosť)

Nech G je otvorená podmnožina v $\mathbb{C}$ a f je konečná funkcia definovaná na G. Hovoríme, že f je komplexne diferencovateľná (monogénna) v bode $z_0 \in G$, ak existuje konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right). \tag{26}$$

Limita v (26) sa nazýva derivácia funkcie f v bode z_0 a označuje sa $f'(z_0)$, resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

V komplexnej analýze sa teda nedefinuje nevlastná derivácia a derivácia v bode ∞. Z Definície 1 vyplýva, že funkcia $f : G \to \mathbb{C}$ je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in G$ práve vtedy, keď existuje komplexné číslo a s vlastnosťou

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ah}{h} = 0. \tag{27}$$

V tomto prípade $a = f'(z_0)$. Výraz ah sa nazýva diferenciál funkcie f v bode z_0 a označuje sa $\mathrm{d}f(z_0)$, resp. $\mathrm{d}f(z_0)(h)$.

Komplexná derivácia má podobné základné vlastnosti ako derivácia v reálnom obore. Vo všeobecnosti je však komplexná diferencovateľnosť podstatne silnejší koncept než reálna diferencovateľnosť.

Veta 6

Ak funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, potom je v bode z_0 spojitá.

Dôkaz.

Výsledok vyplýva z Definície 1 a z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) + f(z_0) \right) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0).$$

■

Poznámka 2

Poznamenajme, že podobne ako v reálnom obore spojitosť funkcie nezaručuje komplexnú diferencovateľnosť funkcie. Túto skutočnosť ilustruje Príklad 17.

Veta 7 (Základné vlastnosti)

(i) *Ak funkcie* f, g *sú komplexne diferencovateľné v bode* $z_0 \in \mathbb{C}$, *potom aj funkcie* $f \pm g$, $f \cdot g$ *a* f/g *(ak* $g(z_0) \neq 0$*) sú komplexne diferencovateľné v bode* z_0 *a platí*

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0),$$

$$(f/g)'\,(z_0) = \left[f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)\right]/[g(z_0)]^2.$$

(ii) *Ak funkcia* f *je komplexne diferencovateľná v bode* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkcia* g *je komplexne diferencovateľná v bode* $f(z_0)$, *potom aj zložená funkcia* $g \circ f$ *je komplexne diferencovateľná v* z_0 *a platí* $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.

(iii) *Ak funkcia* f *je komplexne diferencovateľná v bode* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a prostá na okolí bodu* z_0, *potom inverzná funkcia* f^{-1} *je komplexne diferencovateľná v bode* $w_0 = f(z_0)$ *a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = 1/f'(z_0).$$

V nasledujúcom budeme pracovať s algebraickým tvarom komplexných čísiel a funkcií, t.j., podľa (21) pre dané $z \in \mathbb{C}$ a danú komplexnú funkciu f máme

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{a} \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \quad \text{pre } x, y \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Pripomeňme, že jednoznačne určené reálne funkcie u, v sú podľa (22) reálnou a imaginárnou časťou funkcie f.

Veta 8 (Nutná podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Nech funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom funkcie u, v v (28) spĺňajú tzv. Cauchyho–Riemannove rovnice (podmienky)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{29}$$

Pre deriváciu $f'(z_0)$ potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{30}$$

Náčrt dôkazu.

Ak f je komplexne diferencovateľná v bode z_0, potom podľa Definície 1 je f definovaná na nejakom okolí bodu z_0 a existuje limita v (26). Hodnota tejto limity nezávisí na ceste, po ktorej sa s premenlivým bodom z blížime do bodu z_0. Uvažujme napríklad $z = x + \mathrm{i}y_0$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $x \to x_0$. Do $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ sa teda blížime po priamke $y = y_0$. Platí potom

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z = x + \mathrm{i}y_0 \\ x \to x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + \mathrm{i}y_0) - f(x_0 + \mathrm{i}y_0)}{x - x_0}.$$

Pomocou funkcií u, v sa posledná limita dá rozpísať do tvaru

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) + \mathrm{i}v(x, y_0) - u(x_0, y_0) - \mathrm{i}v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \mathrm{i}\, \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

Limitovaním posledného výrazu dostaneme prvú rovnosť v (30). Podobným spôsobom odvodíme i druhé vyjadrenie derivácie $f'(z_0)$ v (30), kde uvažujeme $z = x_0 + \mathrm{i}y$ s $y \in \mathbb{R}$ a $y \to y_0$ (priamka $x = x_0$). Porovnaním reálnych a imaginárnych častí vyjadrení v (30) dostaneme rovnosti (29). ∎

Poznámka 3

Z Vety 8 vyplýva, že nutnými podmienkami existencie komplexnej derivácie $f'(z_0)$ je existencia prvých parciálnych derivácií reálnych funkcií u, v v bode $[x_0, y_0]$ a platnosť Cauchyho–Riemannovych podmienok (29) v bode $[x_0, y_0]$. Ako však ukazuje nasledujúca veta, nie sú to zároveň aj postačujúce podmienky.

Veta 9 (Nutná a postačujúca podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď reálne funkcie u, v v (28) sú diferencovateľné v $[x_0, y_0]$ a platia rovnice v (29).

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina. Hovoríme, že komplexná funkcia f je komplexne diferencovateľná na G, ak $f'(z)$ existuje v každom bode $z \in G$. Z Vety 9 vyplýva, že ak funkcie u, v v (28) majú spojité I. parciálne derivácie na G a spĺňajú podmienky (29) na G, potom f je komplexne diferencovateľná v G.

Cauchyho–Riemannove podmienky (29) výrazne obmedzujú triedu reálnych diferencovateľných funkcií u, v, ktoré môžu byť reálnymi, resp. imaginárnymi časťami komplexne diferencovateľných funkcií. Ak totiž funkcia $f = u + iv$ je komplexne diferencovateľná v otvorenej množine $G \subseteq \mathbb{C}$ a funkcie u, v majú naviac spojité i druhé parciálne derivácie na G, potom u, v sú riešeniami tzv. Laplaceovej rovnice na G, t.j., platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } G. \tag{31}$$

Riešenia Laplaceovej rovnice sa označujú ako harmonické funkcie. Reálne a imaginárne časti komplexne diferencovateľných funkcií v G musia preto byť nutne harmonickými funkciami v G. Neskôr ukážeme, že požiadavka existencie a spojitosti druhých (dokonca i všetkých vyšších) parciálnych derivácií funkcií u, v na G je prekvapivo prirodzene zabudovaná v koncepte komplexnej derivácie funkcie f na množine G.

Veta 10

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť. Potom ku každej harmonickej funkcii u (resp. v) na G existuje funkcia f komplexne diferencovateľná na G tak, že $u = \mathrm{Re}\, f$ (resp. $v = \mathrm{Im}\, f$) na G.

Príklad 16

Dokážme, že pre každé pevné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Označme $f(z) = z^n$ a nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je zafixované. Podľa Definície 1 máme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right)$$
$$= n z_0^{n-1}.$$

Príklad 17

Funkcia $f(z) = \bar{z} = x - iy$ je síce spojitá v celej komplexnej rovine, ale nie je nikde v $\mathbb{C}$ komplexne diferencovateľná, pretože limita

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0} + \bar{h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\bar{h}}{h}$$

neexistuje pre žiadne $z_0 \in \mathbb{C}$ (porovnaj s Príkladom 15).

Príklad 18

Rozhodnime o existencii derivácie funkcie (ako funkcie v $\mathbb{C}$)

$$f(z) = 1/z$$

overením Cauchyho–Riemannovych rovností (29). Zrejme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Oddelíme reálnu a imaginárnu časť funkcie f

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Platí $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$, $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, a ďalej

$$u'_x = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2, \qquad u'_y = (-2xy)/(x^2 + y^2)^2,$$
$$v'_x = (2xy)/(x^2 + y^2)^2, \qquad v'_y = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2,$$

Funkcie u, v sú diferencovateľné na $\mathcal{D}(f)$ a platia rovnosti (29) na $\mathcal{D}(f)$. Teda podľa Vety 9 funkcia f je komplexne diferencovateľná na $\mathcal{D}(f)$ a platí

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = u'_x + \mathrm{i}v'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \mathrm{i}\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(x - \mathrm{i}y)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{|z|^4} = -\frac{1}{z^2}.$$

Príklad 19

Určme komplexne diferencovateľnú funkciu f, ktorá spĺňa

$$\text{Re}\, f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1, \quad f(0) = 1.$$

Funkcia $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ je harmonická v $\mathbb{C}$, nakoľko

$$u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x, \quad u''_{xx} = 6x + 6,$$
$$u'_y = -6xy - 6y, \quad u''_{yy} = -6x - 6,$$
$$\Downarrow$$
$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^2.$$

Podľa Vety 10 je funkcia u reálnou časťou istej funkcie f, ktorá je komplexne diferencovateľná na $\mathbb{C}$. Jej imaginárnu časť v určíme z podmienok (29)

$$v'_x = -u'_y = 6xy + 6y, \quad v'_y = u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x.$$

Máme teda určiť kmeňovú funkciu v pre dvojicu $6xy + 6y$ a $3x^2 - 3y^2 + 6x$.

Príklad 19

Postupujúc štandardným spôsobom, dostaneme

$$v(x,y) = -y^3 + 3x^2y + 6xy + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Keďže $f(0) = 1$, platí $v(0,0) = \operatorname{Im} f(0) = 0$, a teda $K = 0$. Funkcia f má tvar

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 + \mathrm{i}\,(-y^3 + 3x^2y + 6xy).$$

Nakoniec, ak dosadeníme za reálne premenné x, y výrazy

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2\mathrm{i},$$

dostaneme vyjadrenie hodnoty $f(z)$ pomocou komplexnej premennej z. Po úpravách získame finálny predpis

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1.$$

Holomorfné funkcie

Definícia 2 (Holomorfná funkcia)

Hovoríme, že funkcia f je holomorfná (analytická, regulárna) v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, ak f má deriváciu na nejakom okolí bodu z_0. Funkcia f je holomorfná na množine $G \subseteq \mathbb{C}$, ak je holomorfná v každom bode $z \in G$.

Pojem holomorfnosti funkcie (na rozdiel od komplexnej diferencovateľnosti) je možné zaviesť i pre nevlastný bod ∞. Konkétne, funkcia $f(z)$ sa označuje ako holomorfná v bode ∞, ak funkcia $f(1/z)$ je holomorfná v bode $z_0 = 0$.

Príklad 20

Z predchádzajúcich príkladov (Príklady 16, 17 a 18) vyplýva, že funkcia $f(z) = z^n$ je holomorfná v celej komplexnej rovine, funkcia $g(z) = \bar{z}$ nie je holomorfná v žiadnom bode z $\tilde{\mathbb{C}}$ a funkcia $h(z) = 1/z$ je holomorfná na $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Príklad 21

Funkcia $f(z) = |z|^2$ nie je holomorfná v žiadnom bode z $\tilde{\mathbb{C}}$, hoci je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = 0$, ako sa možno ľahko presvedčiť.

Veta 11

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Funkcia $f : G \to \mathbb{C}$ je konštantná na G práve vtedy, keď je holomorfná na G a $f'(z) = 0$ pre každé $z \in G$.

Dôkaz.

Implikácia "$\Rightarrow$" vyplýva priamo z Definícií 1 a 2. Naopak, nech f je holomorfná na G s $f'(z) = 0$ pre každé $z \in G$. Funkcie u, v z (28) podľa (30) spĺňajú

$$u'_x(x,y) = 0 = v'_x(x,y), \quad v'_y(x,y) = 0 = -u'_y(x,y) \quad \text{pre každé } [x,y] \in G,$$

z čoho vyplýva, že funkcie u, v sú konštantné na oblasti G. To znamená, že i funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je konštantná na G. ■

Dôsledok 1

Nech f, g sú funkcie holomorfné na oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom platia tvrdenia.

(i) *Rovnosť $f' \equiv g'$ platí na G práve vtedy, keď $f \equiv g + K$ na G, kde K je (komplexná) konštanta.*

(ii) *Funkcia f je polynóm stupňa menšieho ako n na G práve vtedy, keď $f^{(n)} \equiv 0$ na G.*

Komplexné funkcionálne rady

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je neprázdna množina a nech $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na G. Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ definovaná

$$s_k(z) := \sum_{n=1}^{k} f_n(z), \quad z \in G, \quad k \in \mathbb{N},$$

sa nazýva (nekonečný) funkcionálny rad s členmi f_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, resp. $\sum f_n(z)$. Rozlišujeme dva typy konvergencie funkcionálnych postupností a radov.

- Bodová konvergencia na G – pre každé $z_0 \in G$ je číselná postupnosť $\{f_n(z_0)\}$ (číselný rad $\sum f_n(z_0)$) konvergentná(ý). Funkcia f s vlastnosťou

  $$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \Big(f(z) = \sum f_n(z)\Big) \quad \text{pre každé } z \in G,$$

  sa nazýva limitná funkcia postupnosti (súčet radu). Symbolicky značíme

  $$f_n \to f \quad \Big(\sum f_n \to f\Big) \quad \text{na } G.$$

- Rovnomerná konvergencia na G – zhruba povedané, konvergencia k limitnej funkcii (k súčtu) nezávisí na premennej z. Presnejšie, ak f je limitná funkcia postupnosti $\{f_n\}$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n \geq n_\varepsilon \text{ a pre každé } z \in G.$$

Rad $\sum f_n(z)$ konverguje rovnomerne k súčtu f na G, ak jeho príslušná postupnosť čiastočných súčtov $\{s_k\}$ konverguje rovnomerne k f na G. Symbolicky zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$ ($\sum f_n \rightrightarrows f$) na G.

Veta 12 (Cauchyho–Bolzanove kritériá rovnomernej konvergencie)

Postupnosť $\{f_n\}$ konverguje rovnomerne na G práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad \textit{pre každé } n, m \geq n_\varepsilon \textit{ a pre každé } z \in G.$$

Rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na G práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\left| \sum_{k=n}^{m+n} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \textit{pre každé } n \geq n_\varepsilon,\ m \in \mathbb{N}, \textit{ a pre každé } z \in G.$$

Cauchyho–Bolzanove kritéria udávajú nutné a zároveň postačujúce podmienky rovnomernej konvergencie postupnosti (radu) funkcií. Pre praktické výpočty sa však s výhodou využíva nasledujúce postačujúce kritérium.

Veta 13 (Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie)

Ak pre rad $\sum f_n$ existuje konvergentný reálny číselný rad $\sum \alpha_n$ s vlastnosťou

$$|f_n(z)| \leq \alpha_n \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N} \text{ a pre každé } z \in G,$$

potom rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na množine G.

Reálny číselný rad $\sum \alpha_n$ vo Vete 13 sa nazýva majorantný rad (majoranta) pre funkcionálny rad $\sum f_n$.

Veta 14

Nech $\{f_n\}$ je postupnosť funkcií spojitých na množine $G \subseteq \mathbb{C}$. Ak rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na G k súčtu f, potom funkcia f je spojitá na G.

Mocninové rady

Dôležitým typom funkcionálnych radov sú tzv. mocninové rady, t.j., rady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{32}$$

kde $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$. Číslo z_0 sa nazýva stred mocninového radu (32) a čísla a_n jeho koeficienty. Množina všetkých komplexných čísiel z, pre ktoré rad (32) konverguje, sa nazýva obor konvergencie mocninového radu. Je zrejme, že obor konvergencie ľubovoľného mocninového radu je vždy neprázdna podmnožina v $\mathbb{C}$ (rad (32) vždy konverguje vo svojom strede z_0). Nasledujúce dve vety popisujú štruktúru oboru konvergencie mocninových radov.

Veta 15 (Abelova veta)

Ak mocninový rad (32) konverguje v istom komplexnom čísle $z_1 \neq z_0$, potom konverguje absolútne v každom $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúcom

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Veta 16 (Cauchyho–Hadamardova veta)

Pre rad (32) definujme nezáporné reálne číslo R predpisom

$$R := 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{33}$$

Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak $R = 0$, potom rad (32) konverguje iba vo svojom strede z_0 (teda diverguje na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$).*

(ii) *Ak $R = \infty$, potom rad (32) konverguje absolútne v každom $z \in \mathbb{C}$.*

(iii) *Ak $0 < R < \infty$, potom rad (32) konverguje absolútne pre každé $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z - z_0| < R$ a diverguje pre každé $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z - z_0| > R$.*

Číslo R v (33) sa nazýva polomer konvergencie mocninového radu (32). Pre R kladné a konečné sa množina

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < R\} \tag{34}$$

označuje ako konvergenčný kruh radu (33). Rad (33) konverguje absolútne vo svojom konvergenčnom kruhu. Naviac, može konvergovať v niektorých bodoch tzv. konvergenčnej kružnice $|z - z_0| = R$.

Poznámka 4

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, potom polomer konvergencie R radu (32) spĺňa

$$R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{35}$$

Ak naviac existuje i $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$, potom polomer konvergencie R je možné vyjadriť aj v tvare

$$R = 1/\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{36}$$

Identita (36) vyplýva z nerovností

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Veta 17

Rad (32) s kladným polomerom konvergencie konverguje absolútne vo svojom konvergenčnom kruhu. Naviac, rad (32) konverguje rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine svojho konvergenčného kruhu.

Veta 18

Nech mocninový rad (32) má kladný polomer konvergencie R a nech f značí súčet radu (32), t.j.,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Potom funkcia f je spojitá a holomorfná v konvergenčnom kruhu radu (32) a

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n \tag{37}$$

pre každé $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z - z_0| < R$. Obzvlášť, mocninový rad (37) (tzv. derivácia radu (32)) má opäť polomer konvergencie R.

Z Vety 18 vyplýva, že súčet každého mocninového radu je funkcia holomorfná v konvergenčnom kruhu tohto radu. Naviac, tento súčet má derivácie všetkých rádov, ktoré sú opäť holomorfné v danom konvergenčnom kruhu. Neskôr ukážeme, že každá holomorfná funkcia (na otvorenej podmnožine v $\mathbb{C}$) sa dá vyjadriť ako súčet istého mocninového radu.

Príklad 22

Najjednoduchším netriviálnym príkladom mocninového radu je geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots ,$$

pozri tiež Príklad 10 b). Jedná sa o mocninový rad so stredom v bode $z_0 = 0$. Nakoľko v tomto prípade $a_n = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$, platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Pre polomer konvergencie teda máme $R = 1$ a konvergenčný kruh daného radu má tvar $|z| < 1$, podľa Vety 16. Ako sme ukázali v Príklade 10 b), kruh $|z| < 1$ je zároveň aj oborom konvergencie daného radu (geometrický rad v zadaní totiž diverguje v každom bode konvergenčnej kružnice $|z| = 1$).

Príklad 23

Nájdime polomery konvergencie mocninových radov

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(n!)\,z^n, \quad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

a) Platí $a_n = n!$ pre $n \in \mathbb{N}_0$. Keďže existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

podľa formuly (36) v Poznámke 4 polomer konvergencie je $R = 1/\infty = 0$. V súlade s Vetou 16(i) teda daný rad konverguje iba vo svojom strede $z = 0$.
b) V tomto prípade máme $a_n = 1/n!$ pre $n \in \mathbb{N}_0$ a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Pre polomer konvergencie potom platí $R = 1/0 = \infty$. Podľa Vety 16(ii) rad konverguje absolútne v celej komplexnej rovine.

Príklad 24

Určme obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3\,4^n}.$$

Koeficienty tohto radu majú tvar $a_n = \frac{1}{(n+2)^3\,4^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ďalej platí

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+3)^3\,4^{n+1}}}{\frac{1}{(n+2)^3\,4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Preto polomer konvergencie je $R = 4$. Podľa Vety 16(iii) rad v zadaní príkladu konverguje absolútne na množine $|z+2| < 4$ a diverguje pre $|z+2| > 4$. V prípade bodov konvergenčnej kružnice, t.j., $|z+2| = 4$, platí

$$\left|\frac{(z+2)^n}{(n+2)^3\,4^n}\right| = \frac{|z+2|^n}{(n+2)^3\,4^n} = \frac{4^n}{(n+2)^3\,4^n} = \frac{1}{(n+2)^3}.$$

Z reálnej analýzy vieme, že číselný rad $\sum 1/(n+2)^3$ je konvergentný. Preto podľa porovnávacieho kritéria rad v zadaní príkladu konverguje absolútne i na konvergenčnej kružnici. Obor konvergencie je teda uzavretý kruh $|z+2| \le 4$.

Príklad 25

Nájdime obor konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n}.$$

Jedná sa o mocninový rad $\sum a_n z^n$, v ktorom niektoré mocniny z "chýbajú"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + (1/1) \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + (1/2) \cdot z^6 + \cdots .$$

Všeobecný koeficient a_n tohto radu možno zapísať v tvare

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0,\ n = 3k-2,\ n = 3k-1, \\ 3/n, & n = 3k \neq 0. \end{cases}$$

Postupnosť $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ má teda dva hromadné body, 0 a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3/n} = 1$. To znamená, že $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, a polomer konvergencie $R = 1$. Rad v zadaní preto konverguje absolútne v kruhu $|z| < 1$ a diverguje pre $|z| > 1$.

Príklad 25

Vyšetríme teraz konvergenciu radu na konvergenčnej kružnici $|z| = 1$. Každé takéto z má podľa (3) goniometrický tvar $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$. Dosadením do radu v zadaní a využitím Moivreovho vzorca (8) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^{3n}}{n} \overset{(8)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n\varphi + \mathrm{i}\sin 3n\varphi}{n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\cos 3n\varphi/n) + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin 3n\varphi/n).$$

Pre $3\varphi \neq 2k\pi$ sú obidva reálne rady v poslednom výraze konvergentné, podľa Dirichletovho kritéria. Teda konverguje i pôvodný komplexný rad v zadaní. Vo zvyšných prípadoch, t.j., v súlade s $-\pi \leq \varphi < \pi$, pre

$$\varphi_1 = -2\pi/3 \rightsquigarrow z_1 = \cos(-2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-2\pi/3) = -(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2,$$
$$\varphi_2 = 0 \rightsquigarrow z_2 = \cos 0 + \mathrm{i}0 = 1,$$
$$\varphi_3 = 2\pi/3 \rightsquigarrow z_3 = \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$$

daný komplexný rad diverguje. Obor konvergencie je teda uzavretý kruh $|z| \leq 1$ okrem vyššie uvedených bodov z_1, z_2, z_3.

Obsah

Polynómy a racionálne lomené funkcie

Polynómom stupňa $n \in \mathbb{N}_0$ rozumieme funkciu komplexnej premennej z tvaru

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{38}$$

kde komplexné čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$, sa nazývajú koeficienty polynómu. Ak $a_0 = \cdots = a_n = 0$, t.j., $P(z) \equiv 0$ v $\mathbb{C}$, hovoríme o tzv. nulovom polynóme. Stupeň nulového polynómu kladieme $-\infty$. Je ďalej zrejmé, že každá nenulová konštantná funkcia je polynómom stupňa 0. Komplexné číslo z_0 s vlastnosťou

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

kde $Q(z)$ je polynóm s vlastnosťou $Q(z_0) \neq 0$, nazývame k-násobným koreňom polynómu P.

Veta 19 (Základná veta algebry)

Každý polynóm stupňa väčšieho ako nula s komplexnými koeficientami má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden koreň.

Priamym dôsledkom Vety 19 je skutočnosť, že každý polynóm P stupňa $n > 0$ má v $\mathbb{C}$ práve n koreňov vrátane ich násobností. To dáva rozklad polynómu P

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_l)^{k_l}, \tag{39}$$

kde $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_l$ sú navzájom rôzne korene polynómu P s odpovedajúcimi násobnosťami $k_1, k_2, \ldots, k_l$, pričom platí $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$. Polynómy sú funkcie spojité a holomorfné v celej komplexnej rovine s deriváciou

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Racionálnu lomenú funkciu definujeme ako podiel dvoch polynómov, t.j.,

$$f(z) = P(z)/Q(z), \tag{40}$$

kde P, Q sú polynómy a $Q \not\equiv 0$. Definičný obor racionálnej lomenej funkcie f je množina $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C},\ Q(z) = 0\}$. Každá racionálna lomená funkcia f v (40) sa dá vyjadriť ako súčet polynómu a konečného počtu parciálnych zlomkov tvaru

$$A/(z - \alpha)^k,$$

kde $A \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je aspoň k-násobný koreň polynómu Q. Racionálne lomené funkcie sú spojité a holomorfné všade na svojich definičných oboroch.

Exponenciálna funkcia

Exponenciálnu funkciu komplexnej premennej z definujeme vzťahom

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{41}$$

Mocninový rad v (41) konverguje absolútne v celej komplexnej rovine (polomer konvergencie $R = \infty$). Podľa Viet 17 a 18 je preto funkcia $\exp z$ definovaná a holomorfná v celom $\mathbb{C}$ s deriváciou

$$(\exp z)' = \exp z \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C}. \tag{42}$$

Z definície v (41) ďalej vyplýva, že platí

$$\exp 0 = 1, \quad (\exp z) \cdot (\exp w) = \exp(z + w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{43}$$

Exponenciálna funkcia $\exp z$ je preto nenulová v celej komplexnej rovine a

$$(\exp z)^{-1} = \exp(-z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{44}$$

Vlastnosti (42), (43) a (44) naznačujú, že funkcia $\exp z$ je holomorfným rozšírením reálnej exponenciálnej funkcie e^x z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. Budeme preto používať označenie e^z namiesto $\exp z$.

Veta 20 (Jednoznačnosť exponenciálnej funkcie)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť obsahujúca bod 0. Komplexná funkcia f definovaná na G je exponeciálnou funkciou na G, t.j., platí $f(z) = \mathrm{e}^z$ pre každé $z \in G$, práve vtedy, keď f je holomorfná na G a platí $f(0) = 1$ a $f'(z) = f(z)$ na G.

Dôsledok 2

Pre každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platia nasledujúce tvrdenia.

(i) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y + i\,\mathrm{e}^x \sin y$.

(ii) $\mathit{Re}\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathit{Re}\,z} \cos(\mathit{Im}\,z), \quad \mathit{Im}\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathit{Re}\,z} \sin(\mathit{Im}\,z), \quad \mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$.

(iii) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathit{Re}\,z} = \mathrm{e}^x, \quad \arg \mathrm{e}^z \equiv \mathit{Im}\,z = y \pmod{2\pi}$.

Poznamenajme, že z Dôsledku 2(iii) vyplýva, že oborom hodnôt funkcie e^z sú všetky nenulové komplexné čísla z, t.j., množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ďalej platia relácie

$$\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{45}$$

$$\mathrm{e}^z = -1 \iff z = (2k-1)\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{46}$$

$$\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{47}$$

Podľa (47) je teda funkcia e^z periodická s množinou všetkých periód $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Goniometrické a hyperbolické funkcie

Goniometrické funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens pre $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \tag{48}$$

$$\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z, \quad \operatorname{cotg} z = \cos z / \sin z. \tag{49}$$

K nim odpovedajúce komplexné hyperbolické funkcie sa definujú

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{50}$$

$$\operatorname{tgh} z = \operatorname{sh} z / \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{cotgh} z = \operatorname{ch} z / \operatorname{sh} z. \tag{51}$$

Platia tzv. Eulerove vzorce

$$\cos z \pm \mathrm{i} \sin z = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} z}, \quad \operatorname{ch} z \pm \operatorname{sh} z = \mathrm{e}^{\pm z}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{52}$$

ktoré dávajú do súvislosti goniometrické funkcie $\sin z$, $\cos z$, resp. hyperbolické funkcie $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, s exponenciálnou funkciou e^z.

Pomocou formúl (52) je možné pre každé $z \in \mathbb{C}$ ľahko odvodiť vyjadrenia

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \tag{53}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{54}$$

Definície v (48) a (50) ďalej dávajú vzájomné vzťahy medzi funkciami $\sin z$, $\operatorname{sh} z$ a $\cos z$, $\operatorname{ch} z$

$$\operatorname{sh} z = -\mathrm{i} \sin(\mathrm{i}z), \quad \sin z = -\mathrm{i} \operatorname{sh}(\mathrm{i}z), \tag{55}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos(\mathrm{i}z), \quad \cos z = \operatorname{ch}(\mathrm{i}z). \tag{56}$$

Z identít (53), (54) a z vlastností exponenciálnej funkcie e^z vyplýva, že funkcie $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ a $\operatorname{ch} z$ sú definované a holomorfné v celej komplexnej rovine a

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \tag{57}$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \tag{58}$$

Hovoríme preto, že tieto funkcie sú holomorfnými rozšíreniami reálnych funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ a $\cosh x$ z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.

Goniometrické a hyperbolické funkcie spĺňajú všetky formule platiace pre ich reálne analógie. Napríklad, pre každé $z \in \mathbb{C}$ platia rovnosti

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1.$$

Funkcie $\sin z$ a $\mathrm{sh}\, z$ sú nepárne, t.j.,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \mathrm{sh}\,(-z) = -\mathrm{sh}\, z,$$

kým funkcie $\cos z$ a $\mathrm{ch}\, z$ sú párne, t.j.,

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \mathrm{ch}\,(-z) = \mathrm{ch}\, z.$$

Funkcie $\sin z$, $\cos z$ sú periodické s množinou všetkých periód $2\pi\mathbb{Z}$. Funkcie $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ sú periodické s periódami $2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Ďalej platia relácie

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{59}$$

$$\cos z = 0 \iff z = (2k-1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{60}$$

$$\mathrm{sh}\, z = 0 \iff z = k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{61}$$

$$\mathrm{ch}\, z = 0 \iff z = (2k-1)\pi \mathrm{i}/2, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{62}$$

Veta 21

Pre každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *platia nasledujúce tvrdenia.*

(i) $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$

(ii) $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}, \quad \cos \bar{z} = \overline{\cos z}.$

(iii) $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}, \quad |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$

Veta 22

Pre každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *platia nasledujúce tvrdenia.*

(i) $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y, \quad \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y.$

(ii) $\operatorname{sh} \bar{z} = \overline{\operatorname{sh} z}, \quad \operatorname{ch} \bar{z} = \overline{\operatorname{ch} z}.$

(iii) $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}, \quad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}.$

Z Vety 21(iii) vyplýva, že goniometrické funkcie $\sin z$ a $\cos z$ sú v komplexnom obore neohraničené (na rozdiel od reálneho oboru), nakoľko reálny hyperbolický sínus $\operatorname{sh} y$ nie je ohraničený v $\mathbb{R}$. Oborom hodnôt funkcií $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ je celé $\mathbb{C}$.

Logaritmická funkcia

Funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii e^z sa nazýva logaritmus (logaritmická funkcia). Keďže funkcia e^z je periodická (s periódami $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$), logaritmus je vo všeobecnosti mnohoznačná funkcia a označujeme ju Log. Logaritmická funkcia je definovaná pre nenulové komplexné čísla, pričom pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (63)$$

Funkcia Log v (63) spĺňa základné vlastnosti

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}\, z} = z, \quad \mathrm{Log}\,(\mathrm{e}^z) = z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (64)$$

Každá celočíslená hodnota k v (63) určuje jedinú jednoznačnú vetvu logaritmu Log. Pre $k = 0$ dostaneme tzv. hlavnú vetvu logaritmu, ktorá sa označuje $\log$. Pre každé nenulové komplexné číslo z potom platí

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad \mathrm{Re}\,(\log z) = \ln|z|, \quad \mathrm{Im}\,(\log z) = \arg z. \qquad (65)$$

Obor hodnôt hlavnej vetvy logaritmu $\log$ je množina $\{w \in \mathbb{C},\ -\pi \leq w < \pi\}$.

Veta 23

Hlavná vetva logaritmu $\log$ *je funkcia holomorfná na množine* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *a*

$$(\log z)' = 1/z \quad \textit{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Dôvodom, prečo sa vo Vete 23 uvažuje množina $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a nie celý definičný obor $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkcie $\log$, je skutočnosť, že funkcia $\arg$, a následne, podľa (65), i funkcia $\log$, nie sú spojité na polpriamke $(-\infty, 0)$ v $\mathbb{C}$. To znamená, že hlavná vetva logaritmu $\log$ nemôže byť ani holomorfná na $(-\infty, 0)$ (pozri Definícia 2 a Veta 6). Poznamenajme, že štandardné vlastnosti reálnych logaritmov platia v komplexnom obore iba pre funkciu Log, t.j., pre každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ máme

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2, \quad \operatorname{Log}(z_1/z_2) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2, \tag{66}$$

ale vo všeobecnosti $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$ a $\log(z_1/z_2) \neq \log z_1 - \log z_2$. Naproti tomu, platí klasická rovnosť $\log 1 = 0$, avšak

$$\operatorname{Log} 1 = 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{teda} \quad \operatorname{Log} 1 = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}. \tag{67}$$

Tieto skutočnosti sú dôsledkom mnohoznačnosti logaritmickej funkcie Log, t.j., symbol $\operatorname{Log} z$ znamená istú množinu hodnôt, a nielen jednu konkrétnu hodnotu.

Mocninová funkcia

Pre dané $c \in \mathbb{C}$ definujeme funkciu c-tá mocnina komplexnej premennej z ako

$$z^c = \mathrm{e}^{c \operatorname{Log} z}. \tag{68}$$

Definičným oborom mocninovej funkcie pre všeobecné komplexné c je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Využitím formúl v (63) a (65) sa výraz v (68) dá vyjadriť v tvare

$$z^c = \mathrm{e}^{c\,(\ln|z| + \mathrm{i} \arg z + 2k\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{c\,(\log z + 2k\pi\mathrm{i})}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{69}$$

Funkcia z^c je preto vo všeobecnosti mnohoznačnou komplexnou funkciou. Pre jednotlivé celočíselné hodnoty k dostávame jej tzv. jednoznačné spojité vetvy. Jednoznačná vetva mocninovej funkcie v (69) odpovedajúca hodnote $k = 0$ sa zvykne označovať ako hlavná spojitá vetva funkcie z^c. Významnu triedu tvoria mocninové funkcie s reálnym racionálnym exponentom c, t.j., pre $c = m/n$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade je funkcia z^c najviac n-značná a platí

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} \left[\cos\left(\frac{m \arg z + 2mk\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{m \arg z + 2mk\pi}{n}\right)\right],$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{70}$$

- $n = 1$ – mocninová funkcia sa redukuje na polynóm ($m \geq 0$), resp. na racionálnu lomenú funkciu ($m < 0$). V tomto prípade máme jednoznačnú funkciu s hodnotou

$$z^m = |z|^m \left[\cos\left(m \arg z\right) + \mathrm{i} \sin\left(m \arg z\right)\right], \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- $m = 1$ – jedná sa o n-tú odmocninu, zavedenú v (12). Mocninová funkcia je n-značná, definovaná v celej komplexnej rovine s hodnotami v (12).
- m, n sú vzájomne nesúdeliteľné – mocninová funkcia je v tomto prípade práve n-značná, pričom pre dané nenulové komplexné číslo z_0 hodnoty $z_0^{m/n}$ ležia vo vrcholoch pravidelného n-uholníka vpísaného do kružnice so stredom v bode 0 a s polomerom $|z_0|^{m/n}$. Okrem toho platia identity

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m = \sqrt[n]{z^m} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- m, n majú netriviálneho spoločného deliteľa – v tomto prípade má funkcia $z^{m/n}$ práve n/d jednoznačných spojitých vetiev, kde d označuje najväčší spoločný deliteľ čísiel m a n. Ďalej platí $z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ pre každé nenulové z, avšak vo všeobecnosti $z^{\frac{m}{n}} \neq \sqrt[n]{z^m}$, ako to ilustujeme v Príklade 32.

Veta 24

Nech $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. Každá jednoznačná vetva mocninovej funkcie $z^{m/n}$ je holomorfná na množine $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a platí

$$\left(z^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot \frac{z^{\frac{m}{n}}}{z} \quad \textit{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

V súlade s Vetou 24 potom hovoríme o jednoznačných holomorfných vetvách mnohoznačnej funkcie $z^{m/n}$.

Príklad 26

Vypočítajme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \qquad \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

Podľa Dôsledku 2(i) platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{0+\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{0}\cos\pi + \mathrm{e}^{0}\sin\pi = -1,$$

$$\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{2}\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2}\sin(\pi/6) = \frac{\mathrm{e}^{2}}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right).$$

Príklad 27

Nájdime v $\mathbb{C}$ všetky riešenia rovnice

$$\sin z = 2.$$

Nech $z = x + \mathrm{i}y$. Potom podľa Vety 21(i) je rovnica v zadaní ekvivalentná s

$$\sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i} \cos x \operatorname{sh} y = 2 \iff \sin x \operatorname{ch} y = 2 \quad \wedge \quad \cos x \operatorname{sh} y = 0.$$

Z posledných dvoch rovníc vyplýva $\cos x = 0$, teda $x = (2k+1)\pi/2$ pre $k \in \mathbb{Z}$. Po dosadení do rovnice $\sin x \operatorname{ch} y = 2$ dostaneme $\operatorname{ch} y = \pm 2$. Keďže reálna hyperbolická funkcia $\operatorname{ch} y$ nadobúda len kladné hodnoty, platí $\operatorname{ch} y = 2$, a podľa (54) máme

$$\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y} = 4.$$

Táto transcendentná rovnica má práve dve riešenia $y = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$. Množina všetkých riešení rovnice v zadaní príkladu má teda tvar

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi + \mathrm{i} \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 28

Dokážme rovnosť množín

$$\operatorname{Log}(1/z) = -\operatorname{Log} z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

a zároveň nájdime z, pre ktoré $\log(1/z) \neq -\log z$, resp. $\log(1/z) = -\log z$. Pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platia podľa (66) a (67) rovnosti množín

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(1/z) &= \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} z = \{2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\} - \{\ln|z| + \arg z + 2l\pi\mathrm{i},\ l \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{-\ln|z| - \arg z + 2(k-l)\pi\mathrm{i},\ k,l \in \mathbb{Z}\}\\ &= -\{\ln|z| + \arg z + 2m\pi\mathrm{i},\ m \in \mathbb{Z}\} = -\operatorname{Log} z.\end{aligned}$$

Napríklad pre $z = -2 = -2 + \mathrm{i}0$ pomocou (65) máme

$$\log(-1/2) = \ln|-1/2| + \mathrm{i}\arg(-1/2) = -\ln 2 - \mathrm{i}\pi,$$
$$-\log(-2) = -\ln|-2| - \mathrm{i}\arg(-2) = -\ln 2 + \mathrm{i}\pi.$$

Teda $\log(-1/2) \neq -\log(-2)$. Naproti tomu, pre $z = 1 + \mathrm{i}$ dostaneme rovnosť

$$\log[1/(1+\mathrm{i})] = \log[(1-\mathrm{i})/2] = \ln(1/\sqrt{2}) - \mathrm{i}\pi/4,$$
$$-\log(1+\mathrm{i}) = -\ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\pi/4 = \ln(1/\sqrt{2}) - \mathrm{i}\pi/4.$$

Poznámka 5 (k Príkladu 28)

Pozorovania v Príklade 28 majú svoje zovšeobecnenie. Konkrétne, dá sa ukázať, že pre každé nenulové komplexné číslo z platí

$$\log\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} -\log z - 2\pi\mathsf{i}, & z \in (-\infty, 0), \\ -\log z, & z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Skutočne, ako sme zistili v Príklade 28, pre $z = -2 \in (-\infty, 0)$ máme

$$-\log(-2) - 2\pi\mathsf{i} = -\ln 2 + \mathsf{i}\pi - 2\pi\mathsf{i} = -\ln 2 - \pi\mathsf{i} = \log(-1/2),$$

kým pre $z = 1 + \mathsf{i} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sme dostali $\log[1/(1+\mathsf{i})] = -\log(1+\mathsf{i})$.

Príklad 29

Vypočítajme

$$\text{a) } \log \mathrm{i}, \quad \operatorname{Log} \mathrm{i} \qquad \text{b) } \log(2+3\mathrm{i}), \quad \operatorname{Log}(2+3\mathrm{i}).$$

a)

$$\log \mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg \mathrm{i} = \ln 1 + \mathrm{i}\pi/2 = \mathrm{i}\pi/2,$$

$$\operatorname{Log} \mathrm{i} = \{\log \mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\mathrm{i}\,(\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b)

$$\log(2+3\mathrm{i}) = \ln|2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg(2+3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{13} + \mathrm{i}\,\operatorname{arctg}(3/2),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(2+3\mathrm{i}) &= \{\log(2+3\mathrm{i}) + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ln\sqrt{13} + \mathrm{i}\,(\operatorname{arctg}(3/2) + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Príklad 30

Stanovme

$$1^{\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \qquad 1^{(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}}.$$

V súlade s definíciami v (68) a (69) postupne dostaneme

$$1^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\ln 1 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\ln|\,\mathrm{i}\,| + \mathrm{i}\pi/2 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}\pi/2 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-\pi/2 - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$1^{(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\,1} = \mathrm{e}^{\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(\ln 1 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})\sqrt{2}k\pi} = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}k\pi + \mathrm{i}\sqrt{2}k\pi}$$

$$= \mathrm{e}^{-\sqrt{2}k\pi}\left[\cos\left(\sqrt{2}k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\sqrt{2}k\pi\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 31

Porovnajme nasledujúce množiny

$$(-8)^{\frac{2}{3}}, \qquad \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2, \qquad \sqrt[3]{(-8)^2}.$$

Na všetky tri mocniny aplikujeme vzorec v (70). Podľa Príkladu 4 vieme, že $|-8| = 8$ a $\arg(-8) = -\pi$. V prípade prvej mocniny je $m = 2$ a $n = 3$, teda

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = 4\left[\cos\left(\frac{4k\pi - 2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4k\pi - 2\pi}{3}\right)\right], \qquad k = 0,\, 1,\, 2.$$

Celkovo máme tri hodnoty pre mocninu $(-8)^{2/3}$, a to

$$\begin{aligned} k = 0 &\longrightarrow 4\left[\cos(-2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-2\pi/3)\right] = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ k = 1 &\longrightarrow 4\left[\cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3)\right] = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ k = 2 &\longrightarrow 4\left[\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)\right] = 4. \end{aligned}$$

Pri zisťovaní hodnôt druhej mocniny $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^2$ využijeme výsledky z Príkladu 4, pričom dostaneme

Príklad 31

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \\ 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \\ -2, \end{cases} \implies \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = \begin{cases} -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ 4. \end{cases}$$

Pre poslednú mocninu v zadaní príkladu platí $\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64}$. Preto vo vzorci (70) dosadzujeme $m = 1$, $n = 3$, $z = 64$, $|z| = 64$ a $\arg z = \arg(64) = 0$, t.j.,

$$\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Jednotlivé hodnoty pre $\sqrt[3]{(-8)^2}$ potom sú

$$k = 0 \longrightarrow 4\left[\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0\right] = 4,$$

$$k = 1 \longrightarrow 4\left[\cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3)\right] = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i},$$

$$k = 2 \longrightarrow 4\left[\cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3)\right] = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Vo všetkých troch prípadoch sme dostali rovnakú množinu hodnôt mocnín. Tento výsledok je v súlade s diskusiou uvedenou vyššie, nakoľko čísla $m = 2$ a $n = 3$ sú vzájomne nesúdeliteľné.

Príklad 32

Porovnajme nasledujúce množiny

$$(-4)^{\frac{2}{4}}, \qquad \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2, \qquad \sqrt[4]{(-4)^2}.$$

Na mocniny aplikujeme podobný postup ako v Príklade 31. Postupne dostaneme

$$(-4)^{\frac{2}{4}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} = \pm 2\mathrm{i},$$

$$\sqrt[4]{-4} = \begin{cases} 1-\mathrm{i}, \\ 1+\mathrm{i}, \\ -1+\mathrm{i}, \\ -1-\mathrm{i}, \end{cases} \implies \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2 = \begin{cases} -2\mathrm{i}, \\ 2\mathrm{i}, \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2, \\ 2\mathrm{i}, \\ -2, \\ -2\mathrm{i}. \end{cases}$$

Platí teda $(-4)^{\frac{2}{4}} = \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2 \neq \sqrt[4]{(-4)^2}$, nakoľko čísla $m = 2$ a $n = 4$ nie sú vzájomne nesúdeliteľné a majú netriviálneho spoločného deliteľa $d = 2$.

L'Hospitalovo pravidlo v komplexnom obore

Podobne ako v reálnom obore, tak i v $\mathbb{C}$ platí tzv. L'Hospitalovo pravidlo, ktoré umožňuje výpočet istého typu limít funkcií. Poznamenajme, že L'Hospitalovo pravidlo pre komplexné funkcie je silnejšie tvrdenie než jeho "reálna verzia". Je to spôsobené skutočnosťou, že pôvodný predpoklad reálnej diferencovateľnosti funkcií je teraz nahradený silnejším predpokladom holomorfnosti funkcií. Pre $r \in \mathbb{R}^+$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ budeme pod pojmom prstencové r-okolie bodu z_0 rozumieť množinu $K^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < r\}$. V prípade nevlastného bodu $z_0 = \infty$ definujeme $K^*(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1/r\}$.

Veta 25 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nech funkcie f a g sú holomorfné na prstencovom okolí $K^*(z_0, r)$, $r > 0$, bodu $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ a nech platí $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 = \lim_{z\to z_0} g(z)$, pričom g nie je identicky nulová funkcia. Potom existuje $\lim_{z\to z_0} (f(z)/g(z))$ (vlastná, nevlastná) a platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Príklad 33

Určme limitu
$$\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}.$$
Zložená funkcia $f(z)=\log(1+z)$ je podľa Vety 23 definovaná a holomorfná na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$, kým funkcia $g(z)=z$ je holomorfná v celej komplexnej rovine. Ďalej $g\not\equiv 0$ v $\mathbb{C}$ a platí

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\log(1+z)=\log 1=0,\qquad \lim_{z\to 0} g(z)=\lim_{z\to 0} z=0.$$

Sú teda splnené všetky predpoklady Vety 25. Limita v zadaní príkladu existuje a

$$\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{[\log(1+z)]'}{(z)'}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{1+z}}{1}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+z}=1.$$