Domáca úloha MA002 č. 1. & 2.

1. Pomocou izoklín znázornite smerové pole pre dané diferenciálne rovnice a na základe toho odhadnite tvar integrálnych kriviek pre tieto rovnice vo fázovom priestore
$$y' = -\sqrt{x^2+y^2}, \qquad y' = 2x.$$

2. Overte pomocou kritéria (cez determinant), či je daná rovnica separovateľná
$$x(y^3 - y^2 + y - 1)\mathrm{d}x - y^3\mathrm{d}y = 0.$$
V prípade, že je separovateľná, vyriešte ju.

3. Upravte danú diferenciálnu rovnicu na vhodný tvar (separovateľná) a nájdite jej partikulárne riešenie
$$y(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{y'(x)}{\sin^2 x}\right)^2}, \qquad y(0) = 1.$$
HINT: Pri výpočte $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ si pomôžte trigonometrickým vzorcom
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4. Riešte dané lineárne diferenciálne rovnice metódou variácie konštant aj metódou integračného faktora.
   - $y' + 2y = e^{-x}$.
   - $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.
   - $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.
   - $y' + x^2 y = x^2$.

5. Riešte dané Bernoulliho diferenciálne rovnice.
   - $y' + xy = xy^3$.
   - $y' + y = x\sqrt{y}$.
   - $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$.
   - $y' \ln x^2 + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}$.

6. Zistite, či je daná diferenciálna rovnica exaktná. Ak áno, nájdite kmeňovú funkciu, ktorá predstavuje riešenie v implicitnom tvare pre túto rovnicu.

- $2xy^2\,\mathrm{d}x + (2x^2y+5)\,\mathrm{d}y = 0.$
- $(7x+5y)\mathrm{d}x + (5x-\sqrt{y})\,\mathrm{d}y = 0.$
- $3x\sqrt{y}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}x^2y^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}y = 0.$

7. Nájdite riešenia (homogénnych/nehomogénnych) lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu s konštantnými koeficientami. Zaveďme označenie $y^{(n)}(x) := \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

   1. $$y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0.$$
   2. $$4y''' - 4y'' + y' = 0.$$
   3. $$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 9y^{(2)} = 0.$$
   4. $$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} - 6y^{(2)} = 0.$$
   5. $$y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0.$$
   6. $$y'' + y = \frac{\sin x\,(2+\cos^2 x)}{\cos^3 x}.$$
   7. $$y'' - 2y' = -4e^{4x}\sin e^{2x}.$$

8. Riešte homogénne/nehomogénne systémy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi (LDs) eliminačnou metódou. Porovnajte riešenie rovnice n-tého rádu s vektorovým riešením pre odpovedajúci systém.

$$\mathbf{x}' = \mathcal{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}; \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

   1. $$\begin{aligned} x_1' &= \phantom{12x_1 - {}} x_2 \\ x_2' &= 12x_1 - x_2, \end{aligned}$$

   čo je možné ekvivalentne zapísať v maticovej notácii

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{t.j.,} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = \overline{0}.$$

2.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = -2, \quad x_2(0) = 4, \quad x_3(0) = 2.$$

5.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

7.
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = 1 = x_2(0).$$

Aplikačné príklady na diferenciálne rovnice

a) Uvažujme $N(t)$ ako populáciu rádioaktívnych atómov izotopu uhlíka C^{14}. Nech je na začiatku (v čase $t_0 = 0$) množstvo rádioaktívneho izotopu uhlíka N_0. Stanovte čas t, za ktorý sa pôvodné množstvo C^{14} rozpadne na štvrtinu svojej pôvodnej hmotnosti, ak vieme, že polčas rozpadu pre C^{14} je $T \approx 5650$ rokov.

   HINT: Použite rovnaký algoritmus ako pri výpočte $Ra - 226$ (na cvičeniach)!

b) Výmenou tepla medzi telesom a okolím sa povrchová teplota telesa mení rýchlosťou, ktorá je priamo úmerná rozdielu teploty telesa a okolitého prostredia (Newtonov tepelný zákon). Odvoďte závislosť teploty $\theta(t)$ telesa na čase t, ak poznáte začiatočná teplotu telesa $\theta(0) = \theta_0$ a ak viete, že

$$\boxed{\theta'(t) = -k\,[\theta(t) - T]\,,}$$

kde T je teplota okolitého prostredia a k je konštanta úmernosti.

Riešenie:

Pomocou integračného faktora $\exp(kt)$ dostaneme partikulárne riešenie tvaru

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)\exp[-kt].$$

c) V elektrickom obvode so striedavým prúdom pri vhodne použitých jednotkách kapacity kondenzátora, ohmického odporu indukčnej cievky a samoindukčnosti spĺňa elektrický prúd $x(t)$ ako funkcia času t diferenciálnou rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \sin t.$$

Nájdite všeobecné riešenie tejto nehomogénnej diferenciálnej rovnice!
Pozn. *V špeciálnom prípade budú konštanty c_1, c_2 určené začiatočnými podmienkami, napríklad ak vieme hodnotu elektrického prúdu v čase t_0 a to, ako sa mení. Všimnime si, že obe riešenia fundamentálneho systému tejto rovnice konvergujú pre rastúci čas t k nule a to pomerne rýchlo, t.j.,*

$$c_1 e^{-t} \quad \& \quad c_2 e^{-3t} \longrightarrow 0 \quad \textit{pre} \quad t \to \infty.$$

Takže pre akékoľvek hodnoty začiatočných podmienok sa priebeh elektrického prúdu ustáli (pre $t \to \infty$) na tvare $\frac{1}{10}\,[\sin t - 2\cos t]$.

Mgr. Peter Šepitka
Mgr. Milan Bačík