Bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí

Motivace

Vycházíme z náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$ z rozložení $L(\vartheta)$, které závisí na parametru ϑ. Množinu všech přípustných hodnot tohoto parametru označíme Ξ. Parametr ϑ neznáme a chceme ho odhadnout pomocí daného náhodného výběru (případně chceme odhadnout nějakou parametrickou funkci $h(\vartheta)$).

Bodovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$ je statistika $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$, která nabývá hodnot blízkých $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv. Existují různé metody, jak konstruovat bodové odhady (např. metoda momentů či metoda maximální věrohodnosti) a také různé typy bodových odhadů. Omezíme se na odhady nestranné, asymptoticky nestranné a konzistentní.

Intervalovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$ rozumíme interval (D, H), jehož meze jsou statistiky $D = D(X_1, \ldots, X_n)$, $H = H(X_1, \ldots, X_n)$ a který s dostatečně velkou pravděpodobností pokrývá $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv.

Typy bodových odhadů

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$, $h(\vartheta)$ je parametrická funkce, $T, T_1, T_2, \dots$ jsou statistiky.

a) Řekneme, že statistika T je nestranným odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$, jestliže
$\forall \vartheta \in \Xi:\ E(T) = h(\vartheta)$.
(Význam nestrannosti spočívá v tom, že odhad T nesmí parametrickou funkci $h(\vartheta)$ systematicky nadhodnocovat ani podhodnocovat. Není-li tato podmínka splněna, jde o vychýlený odhad.)

b) Jsou-li T_1, T_2 nestranné odhady téže parametrické funkce $h(\vartheta)$, pak řekneme, že T_1 je lepší odhad než T_2, jestliže
$\forall \vartheta \in \Xi:\ D(T_1) < D(T_2)$.

c) Posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá posloupnost asymptoticky nestranných odhadů parametrické funkce $h(\vartheta)$, jestliže
$\forall \vartheta \in \Xi: \lim\limits_{n\to\infty} E(T_n) = h(\vartheta)$.
(Význam asymptotické nestrannosti spočívá v tom, že s rostoucím rozsahem výběru klesá vychýlení odhadu.)

d) Posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá posloupnost konzistentních odhadů parametrické funkce h(ϑ), jestliže

$$\forall \vartheta \in \Xi \, \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\left|T_n - h(\vartheta)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(Význam konzistence spočívá v tom, že s rostoucím rozsahem výběru klesá pravděpodobnost, že odhad se bude realizovat daleko od parametrické funkce h(ϑ).)

Lze dokázat, že z nestrannosti odhadu vyplývá jeho asymptotická nestrannost a z asymptotické nestrannosti vyplývá konzistence, pokud posloupnost rozptylů odhadu konverguje k nule.

Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z jednoho náhodného výběru

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou μ, rozptylem σ^2 a distribuční funkcí $\Phi(x)$, přičemž $n \geq 2$. Označme M_n výběrový průměr, S_n^2 výběrový rozptyl a pro libovolné, ale pevně dané $x \in R$ $F_n(x)$ hodnotu výběrové distribuční funkce. Pak platí:

M_n je nestranným odhadem μ (tj. $E(M_n) = \mu$) s rozptylem $D(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$,

S_n^2 je nestranným odhadem σ^2 (tj. $E(S_n^2) = \sigma^2$), ať jsou hodnoty parametrů μ, σ^2 jakékoli,

pro libovolné, ale pevně dané $x \in R$ je výběrová distribuční funkce $F_n(x)$ nestranným odhadem $\Phi(x)$ (tj. $E(F_n(x)) = \Phi(x)$) s rozptylem $D(F_n(x)) = \Phi(x)(1- \Phi(x))/n$, ať je hodnota distribuční funkce $\Phi(x)$ jakákoliv.

Posloupnost $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost konzistentních odhadů μ.

$\{S_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost konzistentních odhadů σ^2.

Pro libovolné, ale pevně dané $x \in R$ je $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost konzistentních odhadů $\Phi(x)$.

Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z r ≥2 nezávislých náhodných výběrů

Nechť $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$, ..., $X_{r1}, \ldots, X_{rn_r}$ je $r \geq 2$ stochasticky nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1 \geq 2$, ..., $n_p \geq 2$ z rozložení se středními hodnotami μ_1, ..., μ_r a rozptylem σ^2.

Celkový rozsah je $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$. Nechť c_1, ..., c_r jsou reálné konstanty, aspoň jedna nenulová. Pak lineární kombinace výběrových průměrů $\sum_{j=1}^{r} c_j M_j$ je nestranným odhadem lineární kombinace středních hodnot $\sum_{j=1}^{r} c_j \mu_j$, ať jsou střední hodnoty μ_1, ..., μ_r jakékoli a vážený průměr výběrových rozptylů $S_*^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{r} (n_j - 1) S_j^2}{n - r}$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2, ať je rozptyl σ^2 jakýkoliv.

Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z jednoho dvourozměrného náhodného výběru

Nechť (X_1,Y_1), ..., (X_n,Y_n) je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s kovariancí σ_{12} a koeficientem korelace ρ. Pak pro libovolné hodnoty parametrů σ_{12} a ρ platí:

$E(S_{12}) = \sigma_{12}$,

$E(R_{12}) \approx \rho$ (shoda je vyhovující pro $n \geq 30$).

Znamená to, že výběrová kovariance S_{12} je nestranným odhadem kovariance σ_{12}, avšak výběrový koeficient korelace R_{12} je vychýleným odhadem koeficientu korelace ρ.

Pojem intervalu spolehlivosti

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$,

$h(\vartheta)$ je parametrická funkce,

$\alpha \in (0,1)$,

$D = D(X_1, ..., X_n)$, $H = H(X_1, ..., X_n)$ jsou statistiky.

a) Interval (D, H) se nazývá 100(1-α)% (oboustranný) interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$, jestliže: $\forall \vartheta \in \Xi : P(D < h(\vartheta) < H) \geq 1-\alpha$.

b) Interval (D, ∞) se nazývá 100(1-α)% levostranný interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$, jestliže: $\forall \vartheta \in \Xi : P(D < h(\vartheta)) \geq 1-\alpha$.

c) Interval $(-\infty, H)$ se nazývá 100(1-α)% pravostranný interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$, jestliže: $\forall \vartheta \in \Xi : P(h(\vartheta) < H) \geq 1-\alpha$.

Číslo α se nazývá riziko (zpravidla α = 0,05, méně často 0,1 či 0,01), číslo 1 – α se nazývá spolehlivost.

Postup při konstrukci intervalu spolehlivosti

a) Vyjdeme ze statistiky V, která je nestranným bodovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$.

b) Najdeme tzv. pivotovou statistiku W, která vznikne transformací statistiky V, je monotónní funkcí $h(\vartheta)$ a přitom její rozložení je známé a na $h(\vartheta)$ nezávisí. Pomocí známého rozložení pivotové statistiky W najdeme kvantily $w_{\alpha/2}$, $w_{1-\alpha/2}$, takže platí:

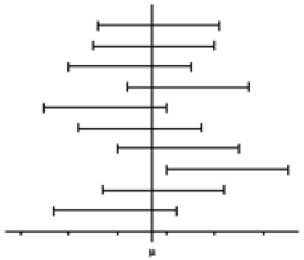
$\forall \vartheta \in \Xi : P(w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha/2}) \geq 1 - \alpha$.

c) Nerovnost $w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $D < h(\vartheta) < H$.

d) Statistiky D, H nahradíme jejich číselnými realizacemi d, h a získáme tak $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti, o němž prohlásíme, že pokrývá $h(\vartheta)$ s pravděpodobností aspoň $1 - \alpha$.

Tvrzení, že (d,h) pokrývá h(ϑ) s pravděpodobností aspoň 1 – α je třeba chápat takto: jestliže mnohonásobně nezávisle získáme realizace $x_1, ..., x_n$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ z rozložení L(ϑ) a pomocí každé této realizace sestrojíme 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro h(ϑ), pak podíl počtu těch intervalů, které pokrývají h(ϑ) k počtu všech sestrojených intervalů bude přibližně 1 – α.

Ilustrace: Jestliže 100x nezávisle na sobě uskutečníme náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou μ a pokaždé sestrojíme 95% empirický interval spolehlivosti pro μ, pak přibližně v 95-ti případech bude ležet parametr μ v intervalech spolehlivosti a asi v 5-ti případech interval spolehlivosti μ nepokryje.



Volba oboustranného, levostranného, nebo pravostranného intervalu: závisí na konkrétní situaci.

Např. oboustranný interval spolehlivosti použije konstruktér, kterého zajímá dolní i horní hranice pro skutečnou délku μ nějaké součástky.

Levostranný interval spolehlivosti použije výkupčí drahých kovů, který potřebuje znát dolní mez pro skutečný obsah zlata μ v kupovaném slitku.

Pravostranný interval spolehlivosti použije chemik, který potřebuje znát horní mez pro obsah nečistot μ v analyzovaném vzorku.

Příklad: Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu,\sigma^2)$, kde $n \geq 2$ a rozptyl σ^2 známe. Sestrojte $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ.

Řešení:

V tomto případě parametrická funkce $h(\vartheta) = \mu$. Nestranným odhadem střední hodnoty je výběrový průměr $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Protože M je lineární kombinací normálně rozložených náhodných veličin, bude mít také normální rozložení se střední hodnotou $E(M) = \mu$ a rozptylem $D(M) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Pivotovou statistikou W bude standardizovaná náhodná veličina $U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Kvantil $w_{\alpha/2} = u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, $w_{1-\alpha/2} = u_{1-\alpha/2}$.

$\forall \vartheta \in \Xi$:

$$1-\alpha \leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} < \mu < M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

Meze 100(1-α)% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 tedy jsou:

$$D = M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \quad H = M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Při konstrukci jednostranných intervalů spolehlivosti se riziko nepůlí, tedy 100(1-α)% levostranný interval spolehlivosti pro μ je

$$\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty \right)$$

a pravostranný je

$$\left(-\infty, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \right).$$

Dosadíme-li do vzorců pro dolní a horní mez číselnou realizaci m výběrového průměru M, dostaneme 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti.

Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly:
2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2.
Výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru $X_1, \dots, X_{10}$ z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme a $\sigma^2 = 0{,}04$. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro μ, a to

a) oboustranný,

b) levostranný,

c) pravostranný.

Řešení:

Vypočteme realizaci výběrového průměru: $m = 2{,}06$. Riziko α je 0,05. V tabulkách najdeme kvantil $u_{0{,}975} = 1{,}96$ pro oboustranný interval spolehlivosti a kvantil $u_{0{,}95} = 1{,}64$ pro jednostranné intervaly spolehlivosti.

ad a) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}96 = 1{,}94$

$h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}96 = 2{,}18$

$1{,}94 < \mu < 2{,}18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}64 = 1{,}96$

$1{,}96 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) $h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} 1{,}64 = 2{,}16$

$\mu < 2{,}16$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

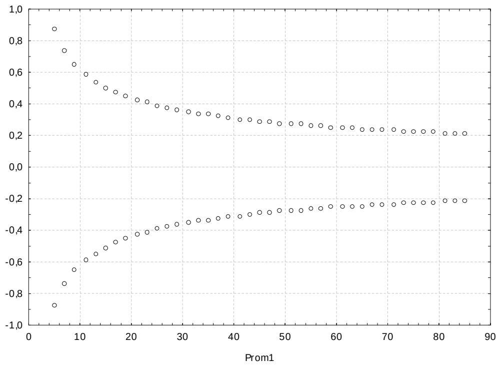
Šířka intervalu spolehlivosti

Nechť (d, h) je 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro h(ϑ) zkonstruovaný pomocí číselných realizací $x_1, \ldots, x_n$ náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$ z rozložení L(ϑ).

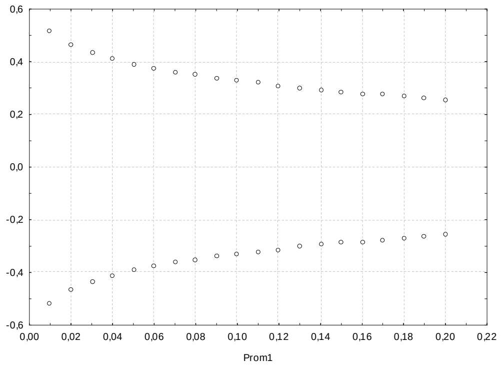
a) Při konstantním riziku klesá šířka h-d s rostoucím rozsahem náhodného výběru.

b) Při konstantním rozsahu náhodného výběru klesá šířka h-d s rostoucím rizikem.

Ilustrace:



Závislost dolní a horní meze
na rozsahu výběru
(při konstantním riziku)



Závislost dolní a horní meze
na riziku
(při konstantním rozsahu výběru)

Příklad: (stanovení minimálního rozsahu výběru z normálního rozložení)
Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Jaký musí být minimální rozsah výběru n, aby šířka $100(1-\alpha)\%$ empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ nepřesáhla číslo Δ?

Řešení: Požadujeme, aby $\Delta \geq h - d = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} - (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$. Z této podmínky dostaneme, že $n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}$. Za rozsah výběru zvolíme nejmenší přirozené číslo vyhovující této podmínce.

Příklad: Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozložení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Kolik měření je nutno provést, aby se hloubka stanovila s chybou nejvýše $\pm$ 0,25 m při spolehlivosti 0,95?

Řešení: Hledáme rozsah výběru tak, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ nepřesáhla 0,5 m. Přitom σ známe. Z předešlého příkladu vyplývá, že
$n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 1{,}96^2}{0{,}5^2} = 61{,}4656$. Nejmenší počet měření je tedy 62.

Metody hledání bodových odhadů parametrů

Motivace

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$, které závisí na parametru ϑ. Parametr ϑ může být obecně vektorový. Úkolem je najít statistiku $T = T(X_1, ..., X_n)$, která nabývá hodnot blízkých parametru ϑ resp. parametrické funkci $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv. Seznámíme se se dvěma metodami hledání bodových odhadů, a to metodou maximální věrohodnosti a metodou momentů.

Definice maximálně věrohodného odhadu

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z diskrétního rozložení (je popsáno pravděpodobnostní funkcí $\pi(x; \vartheta)$ resp. ze spojitého rozložení (je popsáno hustotou $\varphi(x; \vartheta)$).

Simultánní pravděpodobnostní funkce resp. simultánní hustota náhodného vektoru $(X_1, ..., X_n)$ je $\pi(x_1; \vartheta) \ldots \pi(x_n; \vartheta)$ resp. $\varphi(x_1; \vartheta) \ldots \varphi(x_n; \vartheta)$. Pro pevně dané $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ zavedeme věrohodnostní funkci $L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \pi(x_i; \vartheta)$ v diskrétním případě resp.

$L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i; \vartheta)$ ve spojitém případě.

Statistika $\hat{\vartheta}(\mathbf{X})$, která má tu vlastnost, že pro $\forall \vartheta \in \Xi : L(\hat{\vartheta}; x_1, \ldots, x_n) \geq L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)$, se nazývá maximálně věrohodný odhad parametru ϑ.

(Kvůli pohodlnějšímu počítání místo věrohodnostní funkce $L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)$ používáme logaritmickou funkci věrohodnosti $\ln L(\vartheta; x_1, \ldots, x_n)$. Často se také používá zkrácený zápis $L(\vartheta)$ nebo $\ln L(\vartheta)$. Pozor – neplést s označením rozložení!)

Definice věrohodnostních rovnic

Nechť X_1, ..., X_n je náhodný výběr z rozložení, které závisí na vektorovém parametru $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$. Logaritmickou funkci věrohodnosti $\ln L(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$ parciálně derivujeme podle $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ a derivace položíme rovny 0:

$$\frac{\partial \ln L(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)}{\partial \vartheta_r} = 0, r = 1, \ldots, k$$

Dostaneme systém věrohodnostních rovnic. Jeho řešením je maximálně věrohodný odhad parametru $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$: $\hat{\vartheta}(\mathbf{X}) = \left(\hat{\vartheta}_1(\mathbf{X}), \ldots, \hat{\vartheta}_k(\mathbf{X})\right)$

Příklad: (Maximálně věrohodný odhad v diskrétním skalárním případě)
Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta)$. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad parametru ϑ.

Řešení: $X \sim A(\vartheta) \Rightarrow \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x} \text{ pro } x = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

Věrohodnostní funkce: $L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta^{x_i} (1-\vartheta)^{1-x_i} = \vartheta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\vartheta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$ pro x_i = 0, 1, = 0 jinak.

Logaritmická funkce věrohodnosti: $\ln L(\vartheta) = \ln \vartheta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln(1-\vartheta)$

Věrohodnostní rovnice:

$$\frac{d \ln L(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\vartheta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\vartheta} = 0 \Rightarrow (1-\vartheta)\sum_{i=1}^{n} x_i - \vartheta \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i - n\vartheta + \vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\vartheta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Maximálně věrohodným odhadem parametru ϑ alternativního rozložení $A(\vartheta)$ je tedy statistika $\hat{\vartheta}(\mathbf{X}) = M$, tj. výběrový průměr.

Příklad: (Maximálně věrohodný odhad ve spojitém vektorovém případě)
Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Metodou maximální věrohodnosti najděte odhad vektorového parametru $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.

Řešení: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Věrohodnostní funkce: $$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i;\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)}{\sigma^2}} = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Logaritmická funkce věrohodnosti: $$\ln L(\vartheta) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Věrohodnostní rovnice:
$$\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$
$$\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

Z první rovnice $\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$ plyne $\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Maximálně věrohodným odhadem parametru μ je tedy statistika $\hat{\mu}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = M$,

tj. výběrový průměr.

Z druhé rovnice $\frac{\partial \ln L(\vartheta)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$ plyne $-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$.

Za μ dosadíme odhad $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ a získáme $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$.

Maximálně věrohodným odhadem parametru σ^2 je tedy statistika $\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$.

Definice momentového odhadu

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení, které závisí na vektorovém parametru $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$, $\forall \vartheta \in \Xi$. Předpokládáme, že existuje prvních k počátečních momentů $\mu_r' = E(X^r)$, r = 1, …, k daného rozložení.

Označme $M_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$ výběrové počáteční momenty, r = 1, …, k.

Statistika $\hat{\vartheta}(\mathbf{X}) = (\hat{\vartheta}_1(\mathbf{X}), \ldots, \hat{\vartheta}_k(\mathbf{X}))$, která je řešením systému momentových rovnic $\mu_r' = M_r'$, r = 1, …, k, se nazývá momentový odhad parametru $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k)$.

Příklad: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z geometrického rozložení Ge(ϑ). Metodou momentů najděte odhad parametru ϑ.

Řešení: X ~ Ge(ϑ) => $\pi(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x \vartheta \text{ pro } x = 0, 1, \ldots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

Lze odvodit, že $E(X) = \dfrac{1-\vartheta}{\vartheta}$.

Momentová rovnice: $\mu_1' = M_1'$, tj. $\dfrac{1-\vartheta}{\vartheta} = M \Rightarrow 1-\vartheta = \vartheta M \Rightarrow \hat{\vartheta}(\mathbf{X}) = \dfrac{1}{1+M}$.