

Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení

Motivace:

K nejčastěji používaným statistickým metodám patří konstrukce intervalů spolehlivosti pro parametry normálního rozložení či testování hypotéz o těchto parametrech. Normální rozložení je charakterizováno dvěma parametry – střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Budeme tedy řešit úlohy, které se týkají těchto dvou parametrů. K tomu slouží např. **jednovýběrový z-test**, **t-test** či **test o rozptylu**. Můžeme také mít k dispozici náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vek-

torem středních hodnot $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ a naším úkolem bude posoudit rozdílnost středních hodnot μ_1, μ_2 .

K řešení tohoto problému slouží **párový t-test**.

Rozložení statistik odvozených z výběrového průměru a výběrového rozptylu

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Pak platí

$$\text{a) } M \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ tedy } U = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1).$$

(Pivotová statistika U slouží k řešení úloh o μ , když σ^2 známe.)

$$\text{b) } K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

(Pivotová statistika K slouží k řešení úloh o σ^2 , když μ neznáme.)

$$\text{c) } \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

(Tato pivotová statistika slouží k řešení úloh o σ^2 , když μ známe.)

$$\text{d) } T = \frac{M - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1).$$

(Pivotová statistika T slouží k řešení úloh o μ , když σ^2 neznáme.)

Vysvětlení

ad a) Výběrový průměr M je lineární kombinace náhodných veličin s normálním rozložením, má tedy normální rozložení s parametry $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$. Statistika U se získá standardizací M .

ad b) Vhodnou úpravou výběrového rozptylu S^2 , kde použijeme obrat $X_i - M = (X_i - \mu) - (M - \mu)$,

lze statistiku $K = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ vyjádřit jako součet kvadrátů $n - 1$ stochasticky nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozložením. Tento součet se řídí rozložením $\chi^2(n-1)$.

ad c) Statistika $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$ je součet kvadrátů n stochasticky nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozložením, řídí se tedy rozložením $\chi^2(n)$.

ad d) $U \sim N(0, 1)$, $K \sim \chi^2(n-1)$ jsou stochasticky nezávislé, protože M a S^2 jsou stochasticky nezá-

vislé, tudíž statistika $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{n-1}}} = \frac{M - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

Příklad: Hmotnost balíčku krystalového cukru baleného na automatické lince se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 1002 g a směrodatnou odchylkou 8 g. Kontrolor náhodně vybírá 9 balíčků z jedné série a zjišťuje, zda jejich průměrná hmotnost je větší než 999 g. Pokud ne, podnik musí zaplatit pokutu 20 000 Kč. Jaká je pravděpodobnost, že podnik bude muset zaplatit pokutu?

Řešení:

$$X \sim N(1002, 64), M \sim N\left(1002, \frac{64}{9}\right)$$

$$P(M \leq 999) = P\left(\frac{M-1002}{\sqrt{\frac{64}{9}}} \leq \frac{999-1002}{\sqrt{\frac{64}{9}}}\right) = P\left(U \leq -\frac{9}{8}\right) = \Phi\left(-\frac{9}{8}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{9}{8}\right) = 1 - \Phi(1,125) = 1 - 0,87076 = 0,12924$$

Pravděpodobnost, že podnik bude platit pokutu, je asi 12,9%.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Využijeme toho, že STATISTICA pomocí funkce `INormal(x;mu;sigma)` umí vypočítat hodnotu distribuční funkce normálního rozložení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ . Tedy $P(M \leq 999) = \Phi(999)$, kde Φ je distribuční funkce rozložení $N(1002, 64/9)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případě. Dvakrát klikneme na název proměnné `Prom1`. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme `= INormal(999;1002;8/3)`.

Vzorce pro meze 100(1- α)% empirických intervalů spolehlivosti pro μ a σ^2

a) Interval spolehlivosti pro μ , když σ^2 známe (využití pivotové statistiky U)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \right)$$

b) Interval spolehlivosti pro μ , když σ^2 neznáme (využití pivotové statistiky T)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) \right)$$

c) Interval spolehlivosti pro σ^2 , když μ neznáme (využití pivotové statistiky K)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} \right)$$

d) Interval spolehlivosti pro σ^2 , když μ známe (využití pivotové statistiky $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$)

$$\text{Oboustranný: } (d, h) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \right)$$

$$\text{Levostranný: } (d, \infty) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}, \infty \right)$$

$$\text{Pravostranný: } (-\infty, h) = \left(-\infty, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)} \right)$$

Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ . Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru X_1, \dots, X_{10} z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde parametry μ, σ^2 neznáme. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti jak pro μ , tak pro σ^2 a to

- a) oboustranný,
- b) levostranný,
- c) pravostranný.

Řešení: $m = 2,06, s^2 = 0,0404, s = 0,2011, \alpha = 0,05, t_{0,975}(9) = 2,2622, t_{0,95}(9) = 1,8331, \chi^2_{0,975}(9) = 19,023, \chi^2_{0,025}(9) = 2,7, \chi^2_{0,95}(9) = 16,919, \chi^2_{0,05}(9) = 3,325$

ad a) Oboustranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2,06 - \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 2,2622 = 1,92$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 2,06 + \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 2,2622 = 2,20$$

$1,92 < \mu < 2,20$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{19,023} = 0,0191$$

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{2,7} = 0,1347$$

$0,0191 < \sigma^2 < 0,1347$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b) **Levostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ**

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 2,06 - \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 1,8331 = 1,94$$

$1,94 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Levostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$d = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{16,919} = 0,0215$$

$\sigma^2 > 0,0215$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c) **Pravostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ**

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1) = 2,06 + \frac{0,2011}{\sqrt{10}} 1,8331 = 2,18$$

$\mu < 2,18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Pravostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2

$$h = \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} = \frac{9 \cdot 0,0404}{3,325} = 0,1094$$

$\sigma^2 < 0,1094$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Řešení pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné X a 10 případech. Do proměnné X napíšeme dané hodnoty.

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. a Meze sp. směr. odch. (ostatní volby zrušíme) – pro oboustranný 95% interval spolehlivosti ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00, pro jednostranné intervaly změníme hodnotu na 90,00.

Výsledky pro oboustranné 95% intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu μ , pro směrodatnou odchylku σ a rozptyl σ^2 :

Proměnná	Int. spolehl.	Int. spolehl.	Spolehlivost	Spolehlivost	NProm1	NProm2
	-95,000%	95,000	Sm.Odch. -95,000%	Sm.Odch. +95,000%	= $v3^2$	= $v4^2$
X	1,916136	2,203864	0,138329	0,367145	0,019135	0,134795

Vidíme, že

$1,92 < \mu < 2,20$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$0,1383 < \sigma < 0,3671$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

$0,0191 < \sigma^2 < 0,1348$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

Výsledky pro jednostranné 95% intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu μ , pro směrodatnou odchylku σ a rozptyl σ^2 :

Proměnná	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000	Spolehlivost Sm.Odch. -90,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +90,000%	NProm1 =v3^2	NProm2 =v4^2
X	1,943421	2,176579	0,146678	0,330862	0,021514	0,10947

Vidíme, že

$\mu > 1,94$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\mu < 2,20$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma > 0,1467$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma < 0,3309$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma^2 > 0,0215$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

$\sigma^2 < 0,1095$ s pravděpodobností aspoň 0,95,

Jednotlivé typy testů pro parametry normálního rozložení

a) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Necht' $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$ se nazývá **jednovýběrový z-test**.

b) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 neznáme. Necht' $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$ se nazývá **jednovýběrový t-test**.

c) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme. Necht' $n \geq 2$ a c je konstanta.

Test $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 \neq c$ se nazývá **test o rozptylu**.

Provedení testů o parametrech μ , σ^2 pomocí kritického oboru

a) Provedení jednovýběrového z-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m - c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$,

H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$. Kritický obor má tvar:

$$W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty).$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$.

b) Provedení jednovýběrového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$, H_0

zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$. Kritický obor má tvar:

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty).$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu < c$. Kritický obor má tvar: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1))$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu > c$. Kritický obor má tvar: $W = (t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.

c) Provedení testu o rozptylu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{(n-1)s^2}{c}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 \neq c$. Kritický obor má tvar:.

$$W = \langle 0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \rangle \cup \langle \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty \rangle$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 < c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle 0, \chi^2_{\alpha}(n-1) \rangle$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \sigma^2 = c$ proti $H_1: \sigma^2 > c$. Kritický obor má tvar: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(n-1), \infty \rangle$.

Příklad: Podle údajů na obalu čokolády by její čistá hmotnost měla být 125 g. Výrobce dostal několik stížností od kupujících, ve kterých tvrdili, že hmotnost čokolád je nižší než deklarovaných 125 g. Z tohoto důvodu oddělení kontroly náhodně vybralo 50 čokolád a zjistilo, že jejich průměrná hmotnost je 122 g a směrodatná odchylka 8,6 g. Za předpokladu, že hmotnost čokolád se řídí normálním rozložením, můžeme na hladině významnosti 0,01 považovat stížnosti kupujících za oprávněné?

Řešení: X_1, \dots, X_{50} je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Testujeme hypotézu $H_0: \mu = 125$ proti levostranné alternativě $H_1: \mu < 125$.

Protože neznáme rozptyl σ^2 , použijeme jednovýběrový t-test.

Realizace testové statistiky:

$$t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{122 - 125}{\frac{8,6}{\sqrt{50}}} = -2,4667$$

Kritický obor $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)) = (-\infty, -t_{0,99}(49)) = (-\infty, -2,4049)$.

Jelikož testová statistika se realizuje v kritickém oboru, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01. Stížnosti kupujících tedy lze považovat za oprávněné.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – zaškrtneme Výběrový průměr vs. Střední hodnota a zvolíme jednostr. – do políčka Pr1 napíšeme 122, do políčka SmOd1 napíšeme 8,6, do políčka N1 napíšeme 50, do políčka Pr2 napíšeme 125 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0086, tedy zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,01

Testy rozdílů: r, %, průměry: mereni_konst.sta

Poslat/tisknout výsledky každ. výpočtu do okna protokolu Storno

Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty

r1: 0,00 N1: 10
r2: 0,00 N2: 10 p: 1,0000 Jednostr. Oboustr. Výpočet

Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)

Pr1: 122 SmOd1: 8,6 N1: 50 p: .0086 Výpočet
Pr2: 125 SmOd2: 1 N2: 10 Jednostr. Oboustr.

Výběrový průměr vs. střední hodnota

Rozdíl mezi dvěma poměry

P 1: .500000 N1: 10 p: 1,0000 Jednostr. Oboustr. Výpočet
P 2: .500000 N2: 10

Příklad

Bylo prováděno sledování obsahu vitamínu C ve vzorcích mrkve, která byla zakoupena na biofarmě. Celkem bylo provedeno analytické stanovení obsahu vitamínu C ve 20 vzorcích mrkve a byly zjištěny následující koncentrace (v mg/kg):

41,1; 32,6; 28,9; 19,6; 23,6; 35,0; 36,7; 45,9; 49,6; 33,6; 17,8; 24,6; 29,6; 47,7; 41,6; 39,8; 15,6; 34,1; 44,0 a 55,8

Průměrný obsah vitamínu C v mrkvi, který je uváděn v literatuře, je 35 mg/kg.

Liší se obsah vitamínu C stanoveného ve vzorcích mrkve z biofarmy od průměrné hodnoty uváděné v literatuře?

Řešení: X_1, \dots, X_{20} je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Testujeme hypotézu $H_0: \mu = 35$ proti alternativě $H_1: \mu \neq 35$.

Jde o úlohu na jednovýběrový t-test. Průměr a směrodatná odchylka: $m = 34,86$, $s = 11,0872$

Realizace testové statistiky:
$$t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{34,86 - 35}{\frac{11,0872}{\sqrt{20}}} = -0,0565$$

Kritický obor je

$$\begin{aligned} W &= (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup \langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty) = (-\infty, -t_{0,975}(19)) \cup \langle t_{0,975}(19), \infty) = \\ &= (-\infty, -2,093) \cup \langle 2,093, \infty) \end{aligned}$$

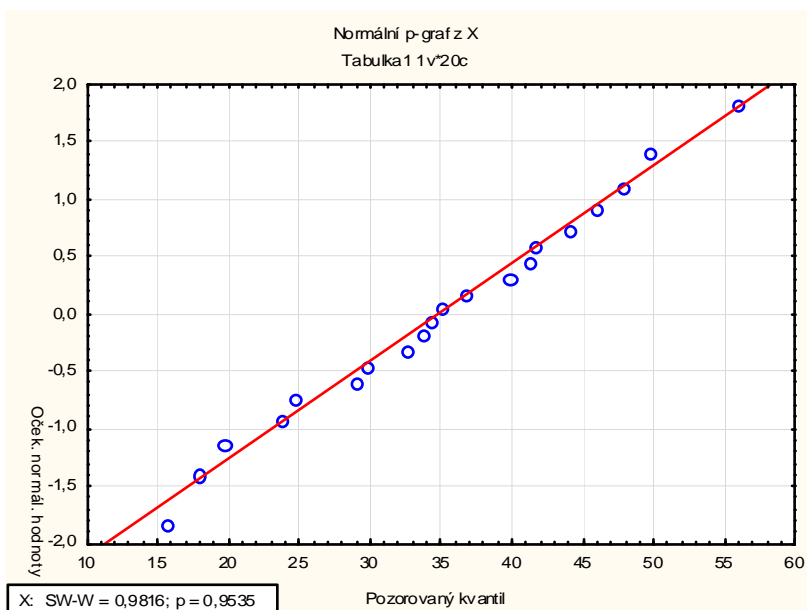
Testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, tedy hypotézu $H_0: \mu = 35$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Otevřeme datový soubor mrkev.sta s jednou proměnnou X a 20 případy. V proměnné X jsou zapsány zjištěné hodnoty obsahu vitamínu C.

Nejprve pomocí N-P grafu a Shapirova – Wilkova testu ověříme, zda data pocházejí z normálního rozložení.

Grafy – 2D Grafy – Normální pravděpodobnostní grafy – Proměnná X – OK - odškrtneme
Neurčovat průměrnou pozici svázaných pozorování – zaškrtneme Shapiro – Wilkův test - OK.



Body v N-P grafu jsou blízko ideální přímky.

S-W test poskytl p-hodnotu 0,9535, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o normalitě.

Provedení jednovýběrového t-testu:

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – t-test, samost. vzorek – OK – Proměnné X – OK. Do Referenční hodnoty napíšeme 35, na záložce Možnosti zaškrtneme Výpočet mezí spolehl. – Výpočet. Dostaneme tabulku:

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) (mrkev.sta)									
	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%	Referenční konstanta	t	SV	p
X: obsah vitamínu C v mrkvi	34,86000	11,08719	20	2,479170	29,67104	40,04896	35,00000	-0,056471	19	0,955557

Test pomocí intervalu spolehlivosti: S pravděpodobností 95 % se neznámá střední hodnota obsahu vitamínu C nachází v intervalu 29,67 mg/kg až 40,05 mg/kg. Protože referenční konstanta 35 mg/kg se nachází v tomto 95% intervalu spolehlivosti, hypotézu $H_0: \mu = 35$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Test pomocí p-hodnoty: Protože p-hodnota je 0,9556, což je větší než hladina významnosti 0,05, hypotézu $H_0: \mu = 35$ nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Náhodný výběr z dvourozměrného rozložení

Nechť $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení, přičemž $n \geq 2$. Označíme

$\mu = \mu_1 - \mu_2$ a zavedeme **rozdílový náhodný výběr** $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$, o němž předpokládáme, že se řídí normálním rozložením.

Vypočteme $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - M)^2$.

Vzorec pro meze 100(1- α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu rozdílového náhodného výběru

Oboustranný: $(d, h) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$

Levostranný: $(d, \infty) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$

Pravostranný: $(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1))$

Příklad: Dvěma rozdílnými laboratorními metodami se zjišťoval obsah chemické látky v roztoku (v procentech). Bylo vybráno 5 vzorků a proměřeno oběma metodami. Výsledky měření jsou obsaženy v tabulce:

číslo vzorku	1	2	3	4	5
1. metoda	2,3	1,9	2,1	2,4	2,6
2. metoda	2,4	2,0	2,0	2,3	2,5

Za předpokladu, že data mají normální rozložení, sestrojte 90% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot výsledků obou metod.

Řešení:

Přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru, jehož realizace jsou: -0,1 -0,1 0,1 0,1 0,1.

Vypočteme $m = 0,02$, $s^2 = 0,012$, $s = 0,109545$. Předpokládáme, že tato data pocházejí z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Vypočteme meze 90% oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ při neznámém σ :

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 0,02 - \frac{0,109545}{\sqrt{5}} t_{0,95}(4) = 0,02 - \frac{0,109545}{\sqrt{5}} 2,1318 = -0,0844$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) = 0,02 + \frac{0,109545}{\sqrt{5}} t_{0,95}(4) = 0,02 + \frac{0,109545}{\sqrt{5}} 2,1318 = 0,1244$$

$-0,0844 < \mu < 0,1244$ s pravděpodobností aspoň 0,9.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o 3 proměnných a 5 případech. Do 1. proměnné X napíšeme hodnoty pro 1. metodu, do 2. proměnné Y hodnoty pro 2. metodu a do 3. proměnné Z rozdíly mezi X a Y.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky, OK - Proměnné Z, Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. Prům. – Interval 90% - Výpočet. Dostaneme tabulku:

Proměnná	Popisné statistiky (chemická látka)	
	Int. spolehl.	Int. spolehl.
Z	-90,000%	90,000
	-0,084439	0,124439

Vidíme tedy, že $-0,0844 < \mu < 0,1244$ s pravděpodobností aspoň 0,9.

Párový t-test

Nechť $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení, přičemž $n \geq 2$. Označíme

$\mu = \mu_1 - \mu_2$ a zavedeme rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$, jehož výběrový

průměr je $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ a výběrový rozptyl je $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - M)^2$. Předpokládáme, že tento

náhodný výběr pochází z normálního rozložení. Test hypotézy o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ se nazývá **párový t-test** a provádí se stejně jako jednovýběrový t-test aplikovaný na rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_n = X_n - Y_n$.

Provedení párového t-testu

Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. Stanovíme kritický obor W . Pokud $t_0 \in W$,

H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_1 .

Oboustranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu \neq c$. Kritický obor má tvar:

$$W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty).$$

Levostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu < c$. Kritický obor má tvar: $w = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-1))$.

Pravostranný test: Testujeme $H_0: \mu = c$ proti $H_1: \mu > c$. Kritický obor má tvar: $w = (t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$.

Příklad: V následující tabulce jsou údaje o výnosnosti dosažené 12 náhodně vybranými firmami při investování do mezinárodního podnikání (veličina X) a do domácího podnikání (veličina Y):

č.firmy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	10	12	14	12	12	17	9	15	9	11	7	15
Y	11	14	15	11	13	16	10	13	11	17	9	19

(Výnosnost je vyjádřena v procentech a představuje podíl na zisku vložených investic za rok.)
Za předpokladu, že data pocházejí z dvourozměrného rozložení a jejich rozdíl se řídí normálním rozložením, na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu, že neexistuje rozdíl mezi střední hodnotou výnosnosti investic do mezinárodního a domácího podnikání proti oboustranné alternativě.

Testování proveďte

- a) pomocí intervalu spolehlivosti,
- b) pomocí kritického oboru.

(Pro úsporu času máme uvedeny realizace výběrového průměru $m = -1,3$ a výběrového rozptylu $s^2 = 4,78$ rozdílového náhodného výběru $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \dots, 12$.)

Řešení:

Testujeme $H_0: \mu = 0$ proti $H_1: \mu \neq 0$

ad a) 90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu σ^2 má meze:

$$d = m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,3 - \frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -2,4677$$

$$h = m + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,95}(n-1) = -1,3 + \frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}} 1,7959 = -0,1989$$

Protože číslo $c = 0$ neleží v intervalu $(-2,4677; -0,1989)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

ad b) Vypočítáme realizaci testové statistiky

$$t_0 = \frac{m - c}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{-1,3}{\frac{\sqrt{4,78}}{\sqrt{12}}} = -2,11085$$

Stanovíme kritický obor $W = (-\infty, -t_{0,95}(11)) \cup (t_{0,95}(11), \infty) = (-\infty, -1,7959) \cup (1,7959, \infty)$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, nulovou hypotézu H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,1.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o 2 proměnných a 12 případech. Do 1. proměnné X napíšeme hodnoty pro mezinárodní podnikání, do 2. proměnné hodnoty pro domácí podnikání.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – t-test pro závislé vzorky, OK - Proměnné X, Y – OK – Výpočet. Dostaneme tabulku:

Proměnná	t-test pro závislé vzorky (investovani) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. $p < ,05000$							
	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p
X	11,91667	2,937480						
Y	13,25000	3,048845	12	-1,33333	2,188122	-2,11085	11	0,058490

Vypočtenou p-hodnotu 0,05849 porovnáme se zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,1$. Protože $p \leq \alpha$, zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,1.

Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z alternativního rozložení

Motivace:

Předpokládáme, že provádíme n -krát nezávisle na sobě týž náhodný pokus a sledujeme výskyt nějakého jevu, jehož pravděpodobnost nastoupení v libovolném z těchto n pokusů je rovna neznámému parametru ϑ . Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_n , přičemž $X_i = 1$, když v i -tém pokusu nastal sledovaný jev a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, n$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$. Pomocí tohoto náhodného výběru můžeme konstruovat interval spolehlivosti pro neznámý parametr ϑ nebo testovat hypotézu o tomto parametru. Přitom jako bodový odhad parametru ϑ slouží výběrový průměr $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, tj. relativní četnost výskytu sledovaného jevu.

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ . Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 - \vartheta & \text{pro } x = 0 \\ \vartheta & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{neboli} \quad \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{1-x} & \text{pro } x = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ . Píšeme $X \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = n\vartheta, \quad D(X) = n\vartheta(1 - \vartheta)$$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro $n = 1$.)

Jsou-li X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, \dots, n$, pak $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.)

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se

střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^n X_i$ aproxi-

movat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$.

Pokud součet $\sum_{i=1}^n X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak

rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením.

Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru.

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a necht' je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Pak statistika $U = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$. Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle

centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí

standardizovaným normálním rozložením $N(0,1)$. Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n ,

dostaneme vyjádření:

$$U = \frac{\frac{Y_n - n\vartheta}{n}}{\sqrt{\frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ .

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \vartheta \in \Xi : 1 - \alpha &\leq P \left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2} \right) = \\ &= P \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) \end{aligned}$$

Příklad:

Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich nakupuje v internetových obchodech. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba nakupuje v internetových obchodech.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{100} , přičemž $X_i = 1$, když i -tá osoba nakupuje v internetových obchodech a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 100$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100 \cdot 0,34 \cdot 0,66 = 22,44 > 9$.

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} 1,96 = 0,2472, \quad h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} 1,96 = 0,4328.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$. Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 95% je v uvažované populaci nejméně 24,7% a nejvíce 43,3% osob, které nakupují v internetových obchodech.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,34, Velikost vzorku: 100, Spolehlivost: 0,95 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,3400
Velikost vz. ve skup. (N)	100,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,2482
Horní mez	0,4415
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,2501
Horní mez	0,4423
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,2472
Horní mez	0,4328

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.). Zjišťujeme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost nákupu v internetových obchodech bude pohybovat v mezích 0,2472 až 0,4328.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a necht' je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

$H_0: \vartheta = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta < c$ resp. $H_1: \vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má

asymptoticky rozložení $N(0,1)$. Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp.

$W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0,01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti oboustranné alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{1000} , přičemž $X_i = 1$, když i -tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Známe: $n = 1000$, $m = \frac{16}{1000} = 0,016$, $c = 0,01$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 9,9 > 9$.

a) Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1 - c)}{n}}} = \frac{0,016 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}}} = 1,907$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0,975}) \cup (u_{0,975}, \infty) = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$. Protože $1,907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 - \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} 1,96 = 0,0082$

$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 + \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} 1,96 = 0,0238$

Protože číslo $c = 0,01$ leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:

$p = 2 \min\{\Phi(1,907), 1 - \Phi(1,907)\} = 2 \min\{0,97104, 1 - 0,97104\} = 0,05792$.

Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka3' dialog box. It is divided into three sections for different types of tests. The 'Rozdíl mezi dvěma poměry' section is active, showing input values for P1 (.01600), N1 (1000), P2 (.01000), and N2 (32767), resulting in a p-value of .0626. The other sections are inactive.

Section	Parameter	Value	Test Type	Result
Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty	r1	0,00	Jednostr. / Oboustr.	p: 1,0000
	r2	0,00		
Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)	Pr1	0,	Jednostr. / Oboustr.	p: 1,0000
	Pr2	0,		
Rozdíl mezi dvěma poměry	P 1	.01600	Jednostr. / Oboustr.	p: .0626
	N1	1000		
	P 2	.01000		
	N2	32767		