11. cvičení: Korelační analýza

Příklad 1.: 12 různých softwarových firem nabízí speciální programové vybavení pro vedení účetnictví. Jednotlivé programy byly posouzeny odbornou komisí složenou z počítačových odborníků a komisí složenou z profesionálních účetních. Úkolem bylo doporučit vhodný program na základě stanovení pořadí jednotlivých programů. Výsledky posouzení:

Produkt firmy číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pořadí dle odborníků	6	7	1	8	4	2,5	9	12	10	2,5	5	11
Pořadí dle účetních	4	5	2	10	6	1	7	11	8	3	12	9

Vypočtěte Spearmanův koeficient pořadové korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že hodnocení obou komisí jsou nezávislá.
Výsledky: $r_S = 0{,}715$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA
Načteme datový soubor vedeni_ucetnictvi.sta o dvou proměnných X (hodnocení 1. komise), Y (hodnocení 2. komise) a 12 případech.
Statistiky – Neparametrické statistiky – Korelace – OK – vybereme Vytvořit detailní report - Proměnné X, Y – OK – Spearmanův koef. R. Dostaneme tabulku

	Spearmanovy korelace (vedeni_ucetnictvi.sta) ChD vynechány párově Označ. korelace jsou významné na hl. p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet plat.	Spearman R	t(N-2)	p-hodn.
X & Y	12	0,714537	3,229806	0,009024

Spearmanův koeficient pořadové korelace nabývá hodnoty 0,7145, testová statistika se realizuje hodnotou 3,2298, odpovídající p-hodnota je 0,009024, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o pořadové nezávislosti hodnocení dvou komisí ve prospěch oboustranné alternativy.
Upozornění: Systém STATISTICA používá při testování hypotézy o pořadové nezávislosti veličin X, Y asymptotickou variantu testu bez ohledu na rozsah náhodného výběru. Pokud rozsah výběru nepřesáhne 20, měli bychom systém STATISTICA použít jen k výpočtu r_S a testování bychom měli provést pomocí tabelované kritické hodnoty. V našem případě pro $n = 12$ a $\alpha = 0{,}05$ je kritická hodnota 0,5804. Vidíme, že nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05, protože $0{,}7145 \geq 0{,}5804$.

Příklad 2.: Získali jsme náhodný výběr rozsahu 18 z dvourozměrného rozložení, jímž se řídí náhodný vektor (X,Y). Je známo, že náhodné veličiny X a Y jsou ordinálního typu a že součet kvadrátů odchylek pořadí $\sum_{i=1}^{18} (R_i - Q_i)^2 = 502$. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že náhodné veličiny X a Y jsou pořadově nezávislé proti oboustranné alternativě.
Výsledky: $r_S = 0{,}4815$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 3.: Pět mužů, kteří bydlí v jednom panelovém domě, se rozhodlo zjistit a zapsat svou hmotnost [kg] a výšku [cm]. Zapsané hodnoty jsou:

muž	hmotnost	výška
1	76	170
2	86	177
3	73	169
4	84	174
5	79	175

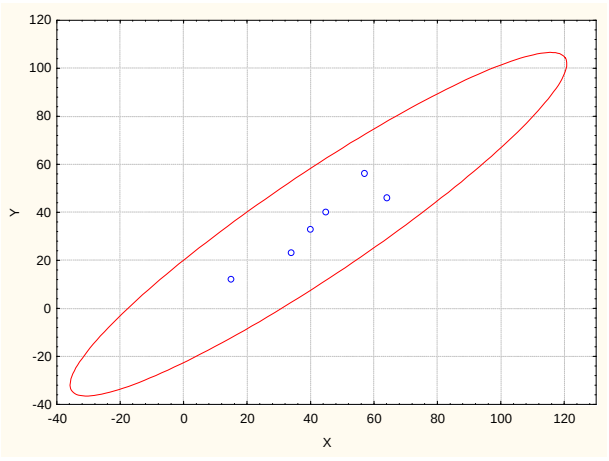
Najděte realizaci výběrového koeficientu korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že hmotnost a výška jsou nezávislé veličiny proti oboustranné alternativě.
Pro úsporu času máte uvedeny tyto číselné realizace: $s_1^2 = 29{,}3, s_2^2 = 11{,}5, s_{12} = 16{,}5$.
Výsledky: $r_{12} = 0{,}89888$, hypotézu o nezávislosti zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 4.: Zjišťovalo se, kolik mg kyseliny mléčné je ve 100 ml krve matek prvorodiček (veličina X) a u jejich novorozenců (veličina Y) těsně po porodu. Byly získány tyto výsledky:

Číslo matky	1	2	3	4	5	6
x_i	40	64	34	15	57	45
y_i	33	46	23	12	56	40

Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram, vypočtěte výběrový korelační koeficient, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro korelační koeficient a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti výsledků obou měření.

Výpočet pomocí systému STATISTICA
Otevřeme datový soubor kyselina_mlecna.sta. Obvyklým způsobem zobrazíme dvourozměrný tečkový diagram, s jehož pomocí posoudíme dvourozměrnou normalitu dat.
Grafy – Bodové grafy – vypneme lineární proložení - Proměnné X, Y – OK – Detaily - Elipsa normální – OK. Ve vzniklém grafu upravíme měřítka na vodorovné a svislé ose:



Testování hypotézy o nezávislosti:
První možnost – pomocí testové statistiky T: Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – 1 seznam proměn. – X, Y – OK – na záložce Možnosti vybereme Zobrazit detailní tabulku výsledků – Výpočet.

Prom. X & prom. Y	Korelace (Tabulka3) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 (Celé případy vynechány u ChD) Průměr	Sm.Odch.	r(X,Y)	r2	t	p	N	Konst. záv.: Y	Směr. záv: Y	Konst. záv.: X	Směrnic záv.: X
X	42,50000	17,39828									
Y	35,00000	15,89969	0,934832	0,873912	5,265339	0,006232	6	-1,30823	0,854311	6,696994	1,022943

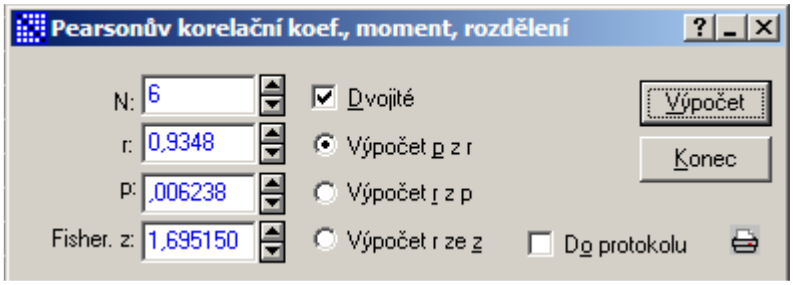
Ve výstupní tabulce je mj. hodnotu výběrového korelačního koeficientu R_{12} (r=0,9348, tzn. že mezi X a Y existuje silná přímá lineární závislost), hodnota testové statistiky (t = 5,2653) a p-hodnota pro test hypotézy o nezávislosti (p=0,006232), H_0 tedy zamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že mezi oběma koncentracemi existuje závislost.

Druhá možnost – pomocí intervalu spolehlivosti pro ρ: Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jedna korelace, t-test – OK – Pozorované R: 0,9348, N: 6, zaškrtneme Fisherovo Z (původ.) – Vypočítat.

	Odhad intervalu Jedna korelace, t-test Hodnota
Pozorovaný korel. koef. R	0,9348
Korelace dle nulové hypotézy (Ró0)	0,0000
Oboustranná p-hodnota	0,0033
Velikost vz. ve skup. (N)	6,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti (Fisher. Z původní):	
Ró:	
Dolní mez	0,5106
Horní mez	0,9930

95% interval spolehlivosti pro ρ má tedy meze 0,5106 a 0,9930, nepokrývá hodnotu 0 a tudíž hypotézu o nezávislosti veličin X, Y zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Třetí možnost – pomocí pravděpodobnostního kalkulátoru: Pokud známe výběrový koeficient korelace a rozsah výběru, můžeme test nezávislosti veličin X, Y provést pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru**.**
Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Korelace – zadáme n a r, zaškrtneme Výpočet p z r – Výpočet.

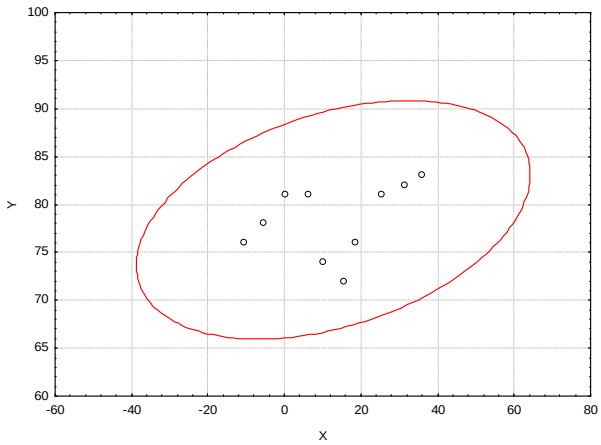


Příklad 4.: Při průzkumu příčin dopravních nehod bylo provedeno měření diastolického tlaku 10 skupin řidičů autobusů při různých teplotách vnějšího ovzduší. Data znázorněte graficky, posuďte jejich dvourozměrnou normalitu, vypočtěte realizaci výběrového koeficientu korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že teplota ovzduší neovlivňuje krevní tlak řidičů proti alternativě, že mezi teplotou a tlakem existuje kladná korelace.

Teplota ovzduší (ve ° C):	-10,5	-5,4	0,2	6,4	10,2	15,6	18,5	25, 5	28,9	31,5	35,8
průměrný tlak (v mm Hg):	76	78	81	81	74	72	76	81	82	83	84

Pro úsporu času máte uvedenou realizaci výběrového koeficientu korelace: $r_{12} = 0{,}3823$
Výsledek: Hypotézu o nezávislosti nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA
Načteme datový soubor ridici_autobusu.sta. Proměnná X obsahuje teploty, proměnná Y tlaky. Vytvoříme dvourozměrný tečkový diagram s 95% elipsou konstantní hustoty pravděpodobnosti:



Vzhled diagramu svědčí o dvourozměrné normalitě dat.

Číselná realizace výběrového koeficientu korelace: $r_{12} = 0{,}3823$ svědčí o existenci poměrně slabé přímé lineární závislosti mezi vnější teplotou a diastolickým krevním tlakem řidičů autobusů – s rostoucí teplotou poněkud roste krevní tlak.
Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu $H_0 : \rho = 0$ proti pravostranné alternativě $H_1 : \rho > 0$. Pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru zjistíme p-hodnotu pro tuto jednostrannou alternativu: p = 0,1378. Na hladině významnosti 0,05 tedy nezamítáme hypotézu, že vztah mezi teplotou a tlakem je pouze náhodný.

Příklad 5 .: V psychologickém výzkumu bylo vyšetřeno 426 hochů a 430 dívek. Ve skupině hochů činil výběrový koeficient korelace mezi verbální a performační složkou IQ 0,6033, ve skupině dívek činil 0,5833. Za předpokladu dvourozměrné normality dat testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že korelační koeficienty se neliší.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty. Do políčka r1 napíšeme 0,6033, do políčka N1 napíšeme 426, do políčka r2 napíšeme 0,5833, do políčka N2 napíšeme 430 - Výpočet.

Dostaneme p-hodnotu 0,6528, tedy nezamítáme nulovou hypotézu o shodě dvou koeficientů korelace na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Úkoly k samostatnému řešení

Příklad 1.: Bylo sledováno 10 žáků. Na základě psychologického vyšetření byli tito žáci seřazeni podle nervové lability (čím byl žák labilnější, tím dostal vyšší pořadí R_i). Kromě toho sledování žáci dostali pořadí Q_i na základě svých výsledků v matematice (nejlepší žák v matematice dostal pořadí 1). Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

Pořadí R_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pořadí Q_i	9	3	8	5	4	2	10	1	7	6

Vypočtěte Spearmanův koeficient pořadové korelace a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že nervová labilita a výsledky v matematice jsou nezávislé.
Výsledek: $r_S = -0{,}127$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Příklad 2.: V náhodném výběru 10 dvoučlenných domácností byl zjišťován měsíční příjem (veličina X, v tisících Kč) a vydání za potraviny (veličina Y, v tisících Kč).

x_i	15	21	34	35	39	42	58	64	75	90
y_i	3	4,5	6,5	6	7	8	9	8	9,5	10,5

Vypočtěte výběrový koeficient korelace. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o nezávislosti veličin X, Y. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro ρ
Výsledek: $r_{12} = 0{,}9405$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05, s pravděpodobností aspoň 0,95 platí: $0{,}7623 < \rho < 0{,}9862$