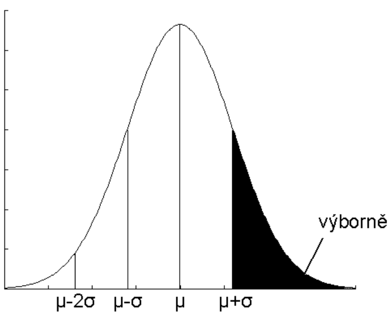
1. cvičení
Příklady na normální rozložení a rozložení z něj odvozená

Příklad 1.: Dokažte přepočtový vzorec $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Příklad 2.: Dlouhodobé zkušenosti s výsledky testu z matematiky na střední škole opravňují učitele k tomu, aby počet bodů v testu dosažených považoval za náhodnou veličinu X s rozložením $N(\mu,\sigma^2)$. Učitel se rozhodl, že bude test známkovat podle následujících pravidel:
výborně, když $X > \mu + \sigma$,
chvalitebně, když $\mu < X \leq \mu + \sigma$,
dobře, když $\mu - \sigma < X \leq \mu$,
dostatečně, když $\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma$,
nedostatečně, když $X \leq \mu - 2\sigma$.
Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student ze skupiny zkoušených studentů bude ohodnocen známkou
a) výborně
b) chvalitebně
c) dobře
d) dostatečně
e) nedostatečně?
Rozložení počtu bodů s hranicemi pro jednotlivé známky znázorněte na obrázku.
Výsledky:
ad a) 0,15866, ad b) 0,34134, ad c) 0,34134, ad d) 0,13591, ad e) 0,02275
ad f)



Příklad 3.: Automat na kávu je seřízen tak, že plní šálky po 250 ml kávy se směrodatnou odchylkou 18 ml. Předpokládáme, že množství kávy v šálku se řídí normálním rozložením.
a) Kolik procent šálků bude obsahovat méně než 262 ml kávy?
b) Kolik procent šálků bude obsahovat mezi 241 ml až 259 ml kávy?
c) Kolik procent šálků bude obsahovat aspoň 253 ml kávy?
Výsledky:
ad a) 74,9 %, ad b) 38,3 %, ad c) 43,3 %

Řešení pomocí systému STATISTICA:
1. možnost – pomocí funkce INormal. Otevřeme nový datový soubor se třemi proměnnými a jednom případu. Do Dlouhého jména těchto proměnných postupně napíšeme:
ad a) =INormal(262;250;18)
ad b) =INormal(259;250;18) -INormal(241;250;18)
ad c) =1-INormal(253;250;18)

2. možnost – pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru.
Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – Z (Normální)
Ad a) Průměr – napíšeme 250, SmOdch – napíšeme 18, X – napíšeme 262 – Výpočet.
V okénku p se objeví 0,747507.
Ad b) Potřebujeme spočítat rozdíl dvou pravděpodobností.
1. pravděpodobnost: Průměr – napíšeme 250, SmOdch – napíšeme 18, X – napíšeme 259 – Výpočet. V okénku p se objeví 0,691462.
2. pravděpodobnost: Průměr – napíšeme 250, SmOdch – napíšeme 18, X – napíšeme 241 – Výpočet. V okénku p se objeví 0,308538.
Hledaná pravděpodobnost je tedy 0,691462 – 0,308538 = 0,382924.
Ad c) Průměr – napíšeme 250, SmOdch – napíšeme 18, X – napíšeme 253, zaškrtneme (1-kumul. p) – Výpočet. V okénku p se objeví 0,433816.

Upozornění: Pomocí systému STATISTICA se podobným způsobem řeší příklad 3.

Příklad 3.: O studium na výběrovou školu se uchází velké množství studentů, kteří se podrobují několika testům. Celkový počet bodů, který mohou získat ve všech testech, se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 420 bodů a směrodatnou odchylkou 100 bodů.

a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný uchazeč dosáhne více než 430 bodů?
b) Jestliže náhodně vybereme 4 uchazeče, jaká je pravděpodobnost, že všichni dosáhnou více než 430 bodů?

Výsledky:
ad a) 0,46017, ad b) 0,04484

Příklad 4.: Nechť X_1, X_2, X_3, X_4 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0, 1)$, i = 1, 2, 3, 4. Jaké rozložení má transformovaná náhodná veličina $X = \dfrac{X_1\sqrt{3}}{\sqrt{X_2^{\,2} + X_3^{\,2} + X_4^{\,2}}}$?

Výsledek: $X \sim t(3)$

Příklad 5.: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim N(0, 1)$, i = 1, 2. Jaké rozložení má transformovaná náhodná veličina $X = \dfrac{X_1^{\,2}}{X_2^{\,2}}$?

Výsledek: $X \sim F(1, 1)$.

Příklad 6.: Dokažte platnost přepočtových vzorců pro kvantily u_α, $t_\alpha(n)$, $F_\alpha(n_1,n_2)$

Příklad 7.:
a) Nechť $U \sim N(0, 1)$. Najděte medián a horní a dolní kvartil.
b) Určete $\chi^2_{0,025}(25)$.
c) Určete $t_{0,99}(30)$ a $t_{0,05}(24)$.
d) Určete $F_{0,975}(5, 20)$ a $F_{0,05}(2, 10)$.

Výsledky:
ad a) $u_{0,50} = 0$, $u_{0,25} = -0{,}67449$, $u_{0,75} = 0{,}67449$
ad b) $\chi^2_{0,025}(25) = 13{,}12$
ad c) $t_{0,99}(30) = 2{,}4573$, $t_{0,05}(24) = -1{,}7109$
ad d) $F_{0,975}(5, 20) = 3{,}2891$, $F_{0,05}(2, 10) = 0{,}05156$

Řešení pomocí systému STATISTICA:
1. možnost – pomocí funkcí implementovaných v položce „Dlouhé jméno“ proměnné.

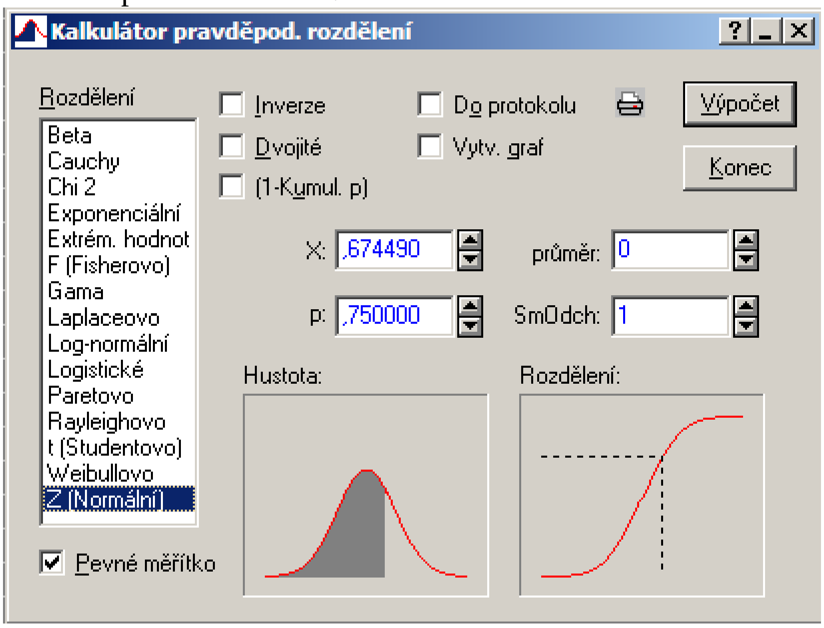
Otevřeme nový datový soubor s osmi proměnnými a jednom případu.
ad a)
Do dlouhého jména první proměnné napíšeme =VNormal(0,5;0;1). Dostaneme 0.
Do dlouhého jména druhé proměnné napíšeme =VNormal(0,25;0;1). Dostaneme -0,67449.
Do dlouhého jména třetí proměnné napíšeme =VNormal(0,75;0;1). Dostaneme 0,67449.

ad b)
Do dlouhého jména čtvrté proměnné napíšeme =VChi2(0,025;25). Dostaneme 13,1197.

ad c)
Do dlouhého jména páté proměnné napíšeme =VStudent(0,99;30). Dostaneme 2,457262.
Do dlouhého jména šesté proměnné napíšeme =VStudent(0,05;14). Dostaneme -1,76131.

ad d)
Do dlouhého jména sedmé proměnné napíšeme =VF(0,975;5;20). Dostaneme 3,2891.
Do dlouhého jména osmé proměnné napíšeme =VF(0,05;2;10).Dostaneme 0,05156.

2. možnost – Pomocí Pravděpodobnostního kalkulátoru.
ad a) Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – Z (Normální)
Do okénka průměr napíšeme 0, do okénka Sm. Odch. napíšeme 1, do okénka p napíšeme pro medián 0,5, pro dolní kvartil 0,25 a pro horní kvartil 0,75. V okénku X se objeví 0 pro medián, -0,67449 pro dolní kvartil a 0,67449 pro horní kvartil.
Ilustrace pro horní kvartil:



Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,75 a hodnota distribuční funkce v bodě 0,67449 je 0,75 (značeno šrafovaně).

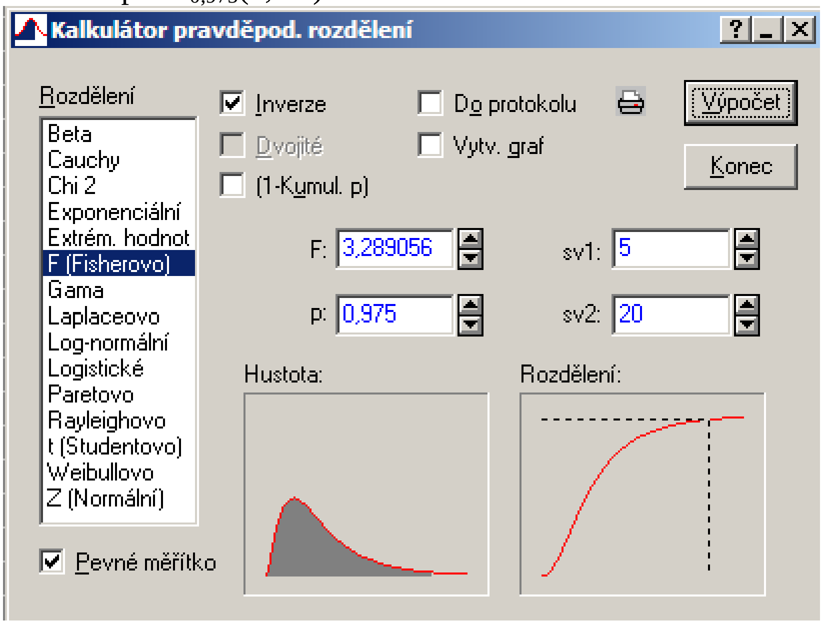
ad b) Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – Chi2.
Do okénka sv. napíšeme 25 a do okénka p napíšeme 0,025. V okénku Chi 2 se objeví 13,11972.

ad c) Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – t (Studentovo).
První možnost: Do okénka sv. napíšeme 30 (resp. 14) a do okénka p napíšeme 0,99 (resp. 0,05). V okénku t se objeví 2,457262 (resp. -1,761310).
Ilustrace pro $t_{0,05}(14)$:

Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,05 a hodnota distribuční funkce v bodě -1,76131 je 0,05 (značeno šrafovaně).

ad d) Statistiky – Pravděpodobnostní kalkulátor – Rozdělení – F (Fisherovo)
Do okénka sv1 napíšeme 5 (resp. 2), do okénka sv2 napíšeme 20 (resp. 10) a do okénka p napíšeme 0,975 (resp. 0,05). V okénku F se objeví 3,289056 (resp. 0,05156).

Ilustrace pro $F_{0,975}(5, 20)$:



Šedá plocha pod grafem hustoty má velikost 0,975 a hodnota distribuční funkce v bodě 3,289056 je 0,975 (značeno šrafovaně).

Příklad 8.: Nechť náhodný vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12{,}25 & 12{,}6 \\ 12{,}6 & 16 \end{pmatrix}\right)$.

a) Vypočtěte koeficient korelace náhodných veličin X, Y.

b) Určete střední hodnotu, rozptyl a rozložení transformované náhodné veličiny Z = X – Y.

Výsledky:

ad a) $\rho = 0{,}9$, ad b) $E(Z) = 5$, $D(Z) = 3{,}05$, $Z \sim N(5;3{,}05)$