

### 3. cvičení: Bodové a intervalové odhady. Metody hledání bodových odhadů.

**Příklad 1.:** Nezávisle opakovaná laboratorní měření určité konstanty jsou charakterizována náhodným výběrem  $X_1, \dots, X_n$ ,  $E(X_i) = \mu$ ,  $D(X_i) = \sigma^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Uvažme statistiky

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, L_n = \frac{X_1 + X_n}{2}.$$

- Dokažte, že  $M_n$  a  $L_n$  jsou nestranné odhady konstanty  $\mu$  a zjistěte, který z nich je lepší.
- Dokažte, že  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$  tvoří posloupnosti asymptoticky nestranných odhadů konstanty  $\mu$ .
- Zjistěte, zda  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$  tvoří posloupnosti konzistentních odhadů konstanty  $\mu$ .

**Výsledky:**

ad a)  $E(M_n) = \mu$ ,  $E(L_n) = \mu$ ,  $D(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ ,  $D(L_n) = \frac{\sigma^2}{2}$

$M_n$  je lepší odhad než  $L_n$  pro  $n \geq 3$ .

ad b) Asymptotická nestrannost plyne z nestrannosti.

ad c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$ , tedy posloupnost  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  je posloupností konzistentních odhadů konstanty  $\mu$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} D(L_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2} > 0$ , tedy posloupnost  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$  není posloupností konzistentních odhadů konstanty  $\mu$ .

**Příklad 2.:** Necht'  $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$  a  $X_{21}, \dots, X_{2n_2}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné výběry, první z rozložení se střední hodnotou  $\mu_1$  a rozptylem  $\sigma^2$ , druhý z rozložení se střední hodnotou  $\mu_2$  a rozptylem  $\sigma^2$ . Označme  $M_1, M_2$  výběrové průměry,  $S_1^2, S_2^2$  výběrové rozptyly a

$$S_*^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \text{ vážený průměr výběrových rozptylů}$$

- Dokažte, že statistika  $M_1 - M_2$  je nestranným odhadem parametrické funkce  $\mu_1 - \mu_2$ .
- Dokažte, že  $S_*^2$  je nestranným odhadem  $\sigma^2$ .

**Výsledky:**

ad a)  $E(M_1 - M_2) = \mu_1 - \mu_2$ .

ad b)  $E(S_*^2) = \sigma^2$ .

**Příklad 3.:** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $Rs(0, b)$ , kde  $b > 0$  je neznámý parametr. Jsou definovány statistiky  $T_1 = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{6}X_4$  a

$T_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ . Ukažte, že  $T_1, T_2$  jsou nestranné odhady parametru  $b$  a určete, který odhad je lepší.

**Výsledky:**

$$E(T_1) = b, E(T_2) = b$$

$$D(T_1) = \frac{25b^2}{216} = 0,116b^2, D(T_2) = \frac{b^2}{12} = 0,083b^2$$

Menší rozptyl má statistika  $T_2$ , odhad  $T_2$  je tedy lepší než  $T_1$ .

**Příklad 4.:** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu; 0,01)$ . Realizace výběrového průměru je  $m = 3$ . Sestrojte  $100(1-\alpha)\%$  empirický interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu  $\mu$ , je-li a)  $\alpha = 0,01$ , b)  $\alpha = 0,05$ , c)  $\alpha = 0,1$ .

**Výsledky:**

ad a)  $2,914 \text{ mm} < \mu < 3,086 \text{ mm}$  s pravděpodobností aspoň 0,99.

ad b)  $2,935 \text{ mm} < \mu < 3,065 \text{ mm}$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c)  $2,945 \text{ mm} < \mu < 3,055 \text{ mm}$  s pravděpodobností aspoň 0,90.

Vidíme, že s rostoucím rizikem klesá šířka intervalu spolehlivosti.

**Příklad 5.:** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu; 0,01)$ . Realizace výběrového průměru je  $m = 3$ . Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu  $\mu$ , je-li a)  $n = 4$ , b)  $n = 9$ , c)  $n = 16$ .

**Výsledky:**

ad a)  $2,902 \text{ mm} < \mu < 3,098 \text{ mm}$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad b)  $2,935 \text{ mm} < \mu < 3,065 \text{ mm}$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

ad c)  $2,951 \text{ mm} < \mu < 3,049 \text{ mm}$  s pravděpodobností aspoň 0,95.

Vidíme, že s rostoucím rozsahem výběru klesá šířka intervalu spolehlivosti.

**Příklad 6.:** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $N(\mu, 0,04)$ . Jaký musí být minimální rozsah výběru, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro  $\mu$  nepřesáhla číslo 0,16?

**Výsledek:**  $n \geq 25$ .

**Příklad 7.:** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $Po(\lambda)$ . Odhadněte parametr  $\lambda$ , a to

a) metodou maximální věrohodnosti

b) metodou momentů.

**Výsledky:** V obou případech je odhadem parametru  $\lambda$  výběrový průměr  $M$ .