8. cvičení: Neparametrické testy o mediánech

Příklad 1.: Při zjišťování kvality jedné složky půdy se používají dvě metody označené A a B. Výsledky:

Vzorek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0,275	0,312	0,284	0,3	0,365	0,298	0,312	0,315	0,242	0,321	0,335	0,307
B	0,28	0,312	0,288	0,298	0,361	0,307	0,319	0,315	0,242	0,323	0,341	0,315

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že metody A a B dávají stejné výsledky.
Výsledky pro párový znaménkový test:
Testová statistika $S_Z^+ = 2$, počet nenulových rozdílů = 9. Ve statistických tabulkách najdeme pro $n = 9$ a $\alpha = 0{,}05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0{,}1 \rangle \cup \langle 8{,}9 \rangle$ neobsahuje hodnotu 2, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05. Neprokázaly se tedy významné rozdíly ve výsledcích obou metod.
Výsledky pro párový Wilcoxonův test:
Testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(5{,}45) = 5$. Protože kritický obor $W = \langle 0{,}5 \rangle$ obsahuje hodnotu 5, zamítáme H_0 na hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 12 případy. Do proměnné X napíšeme výsledky metody A, do proměnné Y výsledky metody B.

Provedení párového znaménkového testu:
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných Y – OK – Znaménkový test.

Dvojice proměnných	Znaménkový test (kvalita_pudy.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
	Počet různých	procent v < V	Z	p-hodn.
X & Y	9	77,77778	1,333333	0,182422

Vidíme, že nenulových hodnot n = 9. Z nich záporných je $77{,}\overline{7}\,\%$, tj. 7. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 9 - 7 = 2$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou $1{,}\overline{3}$. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,1824, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že metody A a B dávají stejné výsledky.

Provedení párového Wilcoxonova testu:
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků (proměnné) – OK – 1. seznam proměnných A, 2. seznam proměnných B – OK – Wilcoxonův párový test.

Dvojice proměnných	Wilcoxonův párový test (kvalita_pudy.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
	Počet platných	T	Z	p-hodn.
X & Y	9	5,000000	2,073221	0,038153

Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky S_W^+ (zde označena T), hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 (zde ozn. Z) a p-hodnotu pro U_0. V tomto případě je p-hodnota 0,038153, tedy nulová hypotéza se zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Upozornění: V tomto případě není splněna podmínka pro využití asymptotické normality statistiky S_W^+, tj. $n \geq 30$. Je tedy vhodnější najít v tabulkách kritickou hodnotu pro Wilcoxonův párový test. Pro n = 9 a $\alpha = 0,05$ je kritická hodnota rovna 5. Protože kritický obor $W = \langle 0,5 \rangle$ obsahuje hodnotu 5, zamítáme H_0 na hladině významnosti 0,05. To souhlasí s výsledkem asymptotického testu.

Příklad 2.: Vyráběné ocelové tyče mají kolísavou délku s předpokládanou hodnotou mediánu 10 m. Náhodný výběr 30 tyčí poskytl tyto výsledky:
9,83 10,10 9,72 9,91 10,04 9,95 9,82 9,73 9,81 9,90
10,12 10,01 9,73 9,88 9,79 10,08 10,05 9,91 9,86 9,99
9,85 10,03 9,89 10,09 9,92 9,88 9,78 10,07 10,02 9,98
Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že předpoklad o mediánu délky tyčí je oprávněný.

Výsledky pro asymptotickou variantu znaménkového testu:

Asymptotická testová statistika: $U_0 = \dfrac{S_Z^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \dfrac{10-15}{\sqrt{\frac{30}{4}}} = -1{,}8257$.

Kritický obor: W = $\left(-\infty, -u_{0,975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$.

Testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, tedy nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výsledky pro asymptotickou variantu Wilcoxonova testu:

$$U_0 = \frac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} = \frac{90{,}5 - \frac{30(30+1)}{4}}{\sqrt{\frac{30(30+1)(2\cdot 30+1)}{24}}} = 2{,}9207\,.$$

Kritický obor: W = $\left(-\infty, -u_{0,975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$.

Testová statistika se realizuje v kritickém oboru, tedy nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Příklad 3.: Výrobce určitého výrobku se má rozhodnout mezi dvěma dodavateli polotovarů vyrábějících je různými technologiemi. Rozhodující je procentní obsah určité látky.

1. technologie	1,52	1,57	1,71	1,34	1,68			
2. technologie	1,75	1,67	1,56	1,66	1,72	1,79	1,64	1,55

Na hladině významnosti 0,05 posuďte pomocí dvouvýběrového Wilcoxonova testu, zda je oprávněný předpoklad, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Výsledek:

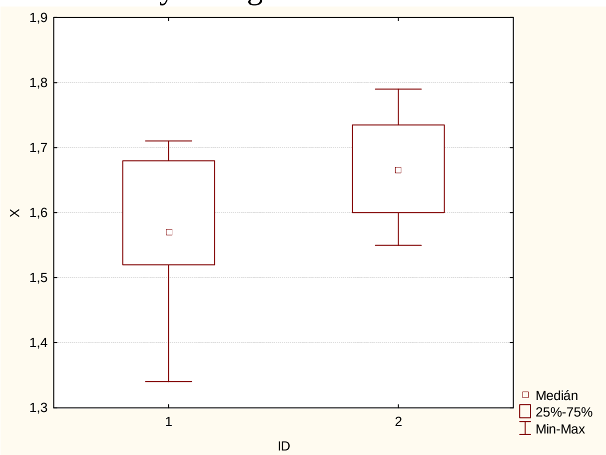
Testová statistika = 12, kritický obor $W = \langle 0,6 \rangle$. Protože testová statistika se nerealizuje v kritickém oboru, nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že obě technologie poskytují stejné procento účinné látky.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 13 případy. Do proměnné X napíšeme zjištěné hodnoty a do proměnné ID napíšeme 5x číslo 1 pro první technologii a 8x číslo 2 pro starý druhou technologii.
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupov.) proměnná ID – OK – M-W U test.
Upozornění: Ve STATISTICE je dvouvýběrový Wilcoxonův test uveden pod názvem Mannův – Whitneyův test.

Proměnná	Sčt poř. skup. 1	Sčt poř. skup. 2	U	Z	Úroveň p	Z upravené	Úroveň p	N platn. skup. 1	N platn. skup. 2	2*1str. přesné p
obsah	27,00000	64,00000	12,00000	-1,17108	0,241567	-1,17108	0,241567	5	8	0,284382

Ve výstupní tabulce jsou součty pořadí T_1, T_2, hodnota testové statistiky $\min\{U_1, U_2\}$ (označená U), hodnota asymptotické testové statistiky U_0 (označená Z), asymptotická p-hodnota pro U_0 a přesná p-hodnota (ozn. 2*1str. přesné p – ta se používá pro rozsahy výběrů pod 30). V našem případě přesná p-hodnota = 0,284382, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05. Neprokázali jsme rozdíl mezi danými dvěma technologiemi.
Výpočet je vhodné doplnit krabicovým diagramem.



Je zřejmé, že první technologie poskytuje vesměs nižší procento účinné látky než druhá technologie a také vykazuje poněkud větší variabilitu.

Příklad 4.: Na data z příkladu 3. aplikujte dvouvýběrový K-S test.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupov.) proměnná ID – OK – Kolmogorov-Smirnovův 2-výběrový test.

Proměnná	Max záp rozdíl	Max klad rozdíl	Úroveň p	Průměr skup. 1	Průměr skup. 2	Sm.odch. skup. 1	Sm.odch. skup. 2	N platn. skup. 1	N platn. skup. 2
obsah	-0,40000C	0,02500C	p > .10	1,56400C	1,66750C	0,147411	0,085147	5	8

Ve výstupní tabulce pro dvouvýběrový K-S test dostaneme maximální záporný a maximální kladný rozdíl mezi hodnotami obou výběrových distribučních funkcí, dolní omezení pro p-hodnotu (p > 0,1), průměry, směrodatné odchylky a rozsahy obou výběrů. Jelikož p-hodnota převyšuje hladinu významnosti 0,05, na této hladině nelze nulovou hypotézu zamítnout.

Příklad 5.: Výrobce koláčů v prášku má 4 nové recepty a chce zjistit, zda se jejich kvalita liší. Upekl proto 5 koláčů z každého druhu a dal je porotě k ohodnocení.
recept A: 72 88 70 87 71,
recept B: 85 89 86 82 88,
recept C: 94 94 88 87 89,
recept D: 91 93 92 95 94.
Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že recepty se neliší. V případě zamítnutí nulové hypotézy zjistěte, které dvojice receptů se liší na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výsledek pro K-W test:

Testová statistika:

$Q = \frac{12}{20 \cdot 21}\left(\frac{23{,}5^2}{5} + \frac{37{,}5^2}{5} + \frac{66^2}{5} + \frac{83^2}{5}\right) - 3 \cdot 21 = 12{,}45$, $\chi_{0,95}{}^2(3) = 7{,}81$. Protože $Q \geq 7{,}81$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výsledek pro mediánový test:

Testová statistika $Q_M = 4\left[\frac{1}{5}\left(1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2\right)\right] - 20 = 16{,}8$, odpovídající kvantil $\chi_{0,95}{}^2(3) = 7{,}81$. Protože $Q_M \geq 7{,}81$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výsledek Neményiho metody mnohonásobného porovnávání:

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 se liší recepty A a D.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme nový datový soubor o dvou proměnných a 20 případech. Do proměnné X napíšeme udělené body, do proměnné ID napíšeme 5x1 pro recept A atd. až 5x4 pro recept D. Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání více nezávislých vzorků - OK – Seznam závislých proměnných nikl, Nezáv. (grupovací) proměnná ID – OK – Summary: Kruskal-Wallis ANOVA & Median test. Ve dvou výstupních tabulkách se objeví výsledky K-W testu a mediánového testu.

	Kruskal-Wallisova ANOVA založ. na poř.; X (kolace_v_prasku.sta) Nezávislá (grupovací) proměnná : ID Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 20) =12,54288 p =,0057			
Závislá: X	Kód	Počet platných	Součet pořadí	Prům. Pořadí
A	1	5	23,50000	4,70000
B	2	5	37,50000	7,50000
C	3	5	66,00000	13,20000
D	4	5	83,00000	16,60000

Závislá: X	Mediánový test, celk. medián = 88,0000; X (kolace_v_prasku.sta) Nezávislá (grupovací) proměnná : ID Chi-Kvadr. = 11,91919 sv = 3 p = ,0077				
	A	B	C	D	Celkem
<= Medián: pozorov.	5,00000	4,00000	2,000000	0,00000	11,00000
očekáv.	2,75000	2,75000	2,750000	2,75000	
poz.-oč.	2,25000	1,25000	-0,750000	-2,75000	
> Medián: pozorov.	0,00000	1,00000	3,000000	5,00000	9,00000
očekáv.	2,25000	2,25000	2,250000	2,25000	
poz.-oč.	-2,25000	-1,25000	0,750000	2,75000	
Celkem: oček.	5,00000	5,00000	5,000000	5,00000	20,00000

Oba testy zamítají hypotézu o shodě mediánů v daných čtyřech skupinách. K-W test poskytuje p-hodnotu 0,0057, p-hodnota pro mediánový test je 0,0077.
Nyní provedeme mnohonásobné porovnávání, abychom zjistili, které dvojice receptů se liší. Zvolíme Vícenás. porovnání průměrného pořadí pro vš. skupiny.

Závislá: X	Vícenásobné porovnání p hodnot (oboustr.); X (kolace_v_prasku.sta) Nezávislá (grupovací) proměnná : ID Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 20) =12,54288 p =,0057			
	A R:4,7000	B R:7,5000	C R:13,200	D R:16,600
A		1,000000	0,138620	0,008824
B	1,000000		0,765968	0,090075
C	0,138620	0,765968		1,000000
D	0,008824	0,090075	1,000000	

Tabulka obsahuje p-hodnoty pro porovnání dvojic skupin. Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší recepty A, D.
Data znázorníme graficky pomocí krabicových diagramů.


Krabicový graf dle skupin
Proměnná: X
96
94
92
90
88
86
84
82
80
78
76
74
72
70
68
X
A
B
C
D
ID
Medián
25%-75%
Min-Max