

Spojité modely a statistika – 1. přednáška

Funkce a zobrazení více proměnných

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

15. 9. 2014

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Zobrazení a funkce více proměnných
 - Funkce více proměnných
 - Křivky v euklidovských prostorech

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Zuzana Došlá, Ondřej Došlý, *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, MU Brno, 2006, 150 s.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple*, MU Brno, 1999, 273 s. (příp. <http://www.math.muni.cz/~plch/mapm>).
- *Předmětové záložky v IS MU*

V diferenciálním a integrálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se (jak už název napovídá) zabývali zobrazeními

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Přirozeně se nabízí otázka, jak příslušné pojmy zobecnit pro případ zobrazení

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Začneme dvěma speciálními případy:

- $n=1$ – funkce více proměnných
- $m=1$ – křivka v prostoru \mathbb{R}^n

Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *reálná funkce více proměnných* (ty obvykle značíme x_1, \dots, x_n). Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z . To znamená, že funkce f definované v „prostoru“ $E_n = \mathbb{R}^n$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

a např. funkce f definované v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována.
(Častým úkolem - nejen - v písemkách bývá nalézt k dané formuli pro funkci co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definiční obor funkce

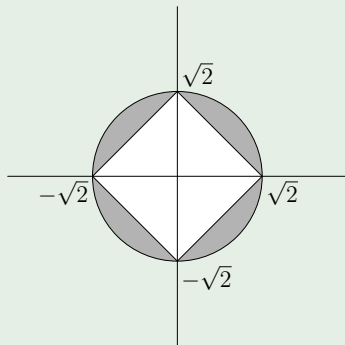
Příklad

Nalezněte a v rovině zobrazte definiční obor funkce

$$f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}.$$

Řešení

Funkce \arccos připouští argument pouze z intervalu $[-1, 1]$, odmocnina připouští pouze nezáporný argument. Definičním oborem je tedy množina bodů (x, y) vyznačená na obrázku.



Příklady

Příklad

Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)}$,

b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$,

Příklad

Určete definiční obor funkce

$$f(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Definice

Grafem funkce více proměnných je podmnožina

$G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ splňující

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

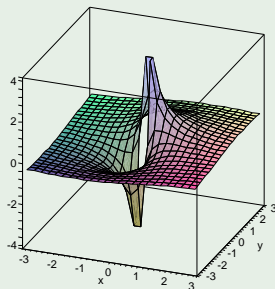
kde A je definiční obor funkce f .

Příklad

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku,
maximálním definičním
oborem je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Vrstevnice funkce dvou proměnných

U funkcí dvou proměnných uvažujeme pro lepší názornou představu rovněž tzv. vrstevnice funkce (obdoba vrstevnic v geografickém smyslu).

Definice

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice funkce f na úrovni c* .

Zřejmě jde v případě vrstevnice na úrovni c o přímou analogii řezu grafu funkce f rovinou $z = c$. Pro představu o grafu funkce dvou proměnných jsou samozřejmě užitečné rovněž řezy rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a rovinami rovnoběžnými (kde je místo 0 jiná konstanta).

Příklady

Příklad

Načrtněte vrstevnice funkcí:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2,$

b) $f(x, y) = \sqrt{xy}.$

Křivky

Už na příkladu s vrstevnicemi jsme viděli příklad „prostorových“ křivek (správněji spíše jejich *obrazů*).

Definice

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Je třeba rozlišovat křivku a její obraz v E_n :

Příklad

Obrazem křivky $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ v rovině E_2 je jednotková kružnice, stejně jako v případě **jiné** křivky $t \mapsto (\cos(t^3), \sin(t^3))$, $t \in \mathbb{R}$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné lze definovat:

Definice

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in E_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál*: $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách.

Analogie souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce pro křivky:

Věta

Je-li $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Tečna ke křivce

Derivace zadává *tečný vektor* ke křivce $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$, tj. vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření \mathbb{R}^n daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je *tečna ke křivce* c v bodě t_0 , na rozdíl od tečného vektoru nezávisí na parametrizaci křivky c .

V geometrii a fyzice se v souvislosti s křivkami zavádějí i další pojmy:

Příklad

Pro křivku $c(t) = (\cos t, t, t^2)$, $t \in [0, 3]$ určete *rychlost*, *velikost rychlosti* a *zrychlení* v čase $t = 0$.

$$c'(t) = (-\sin t, 1, 2t), \quad c''(t) = (-\cos t, 0, 2),$$

$$c'(0) = (0, 1, 0), \quad \|c'(0)\| = 1, \quad c''(0) = (-1, 0, 2).$$

Zrychlení ve směru tečny je pak $\frac{1}{\|c'(0)\|} (c'(0) \cdot c''(0))$.

Příklady

Příklad

Určete tečnu křivky dané předpisem

$$f(t) = (2 \cos t + \cos 3t, \sin 2t, t)$$

v bodě $t = \frac{3\pi}{2}$.

Příklad

Na křivce $f(t) = (t, t^2, t^3)$ najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $x + 2y + z = 1$.