Matematika III – 11. přednáška
Náhodné veličiny – základní typy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

1. 12. 2014

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant, *Matematika drsně a svižně*, MU Brno, 2013, 774 s. (též jako e-text).
- Karel Zvára, Josef Štěpán, **Pravděpodobnost a matematická statistika**, Matfyzpress, 4. vydání, 2006, 230 stran, ISBN 80-867-3271-1.
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, **Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů)**, Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, **Statistika**, Masarykova univerzita, 2004, distanční studijní opora ESF, `http://www.math.muni.cz/~budikova/esf/Statistika.zip`.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, **Základní statistické metody**, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.

Typy spojitých náhodných veličin

Rovnoměrné spojité rozdělení $\mathrm{Rs}(a, b)$ je nejjednodušším příkladem spojitého rozdělení. Ilustruje, že při jednoduše formulovaném požadavku na chování rozdělení nám nezbude moc prostoru pro jeho definici. Nyní chceme, aby pravděpodobnost každé hodnoty v předem daném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ byla stejná, tj. hustota f_X našeho rozdělení náhodné veličiny X má být konstantní. Pak ovšem jsou pro libovolná reálná čísla $-\infty < a < b < \infty$ jen jediné možné hodnoty

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & t \geq b, \end{cases} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a, b) \\ 1 & t \geq b. \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení $\mathrm{Ex}(\lambda)$ je dalším rozdělením, které je snadno určeno požadovanými vlastnostmi náhodné veličiny. Předpokládejme, že sledujeme náhodný jev, jehož výskyty v nepřekrývajících se časových intervalech jsou nezávislé. Je-li tedy $P(t)$ pravděpodobnost, že jev nenastane během intervalu délky t, pak nutně $P(t+s) = P(t)P(s)$ pro všechna $t, s > 0$. Předpokládejme navíc diferencovatelnost funkce P a $P(0) = 1$. Pak jistě $\ln P(t+s) = \ln P(t) + \ln P(s)$, takže limitním přechodem

$$\lim_{s \to 0_+} \frac{\ln P(t+s) - \ln P(t)}{s} = (\ln P)'_+(0).$$

Označme si spočtenou derivaci zprava v nule jako $-\lambda \in \mathbb{R}$. Pak tedy pro $P(t)$ platí $\ln P(t) = -\lambda t + C$ a počáteční podmínka dává jediné řešení

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Všimněme si, že z definice našich objektů vyplývá, že $\lambda > 0$.

Nyní uvažme náhodnou veličinu X udávající (náhodný) okamžik, kdy náš jev poprvé nastane (je vidět analogie s geometrickým rozdělením?). Zřejmě tedy je distribuční funkce rozdělení pro X dána

$$F_X(t) = 1 - P(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

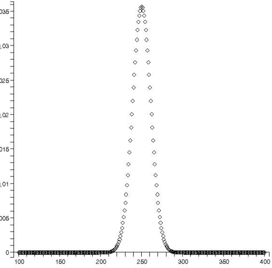
Je vidět, že skutečně jde rostoucí funkci s hodnotami mezi nulou a jedničkou a správnými limitami v $\pm\infty$.
Hustotu tohoto rozdělení dostaneme derivováním distribuční funkce, tj.

$$f_X = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

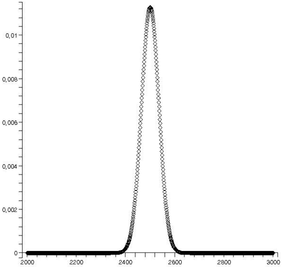
Normální rozdělení

Jde o nejdůležitější rozdělení. Uveďme nejprve motivaci pro jeho zavedení.

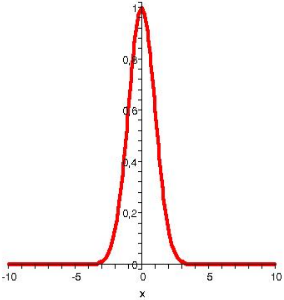
Pokud budeme v **binomickém rozdělení** $\mathrm{Bi}(n, p)$ zvyšovat n při zachování úspěšnosti p, bude mít pravděpodobnostní funkce pořád přibližně stejný tvar.



$\mathrm{Bi}(500, 0.5)$



$\mathrm{Bi}(5000, 0.5)$



graf funkce $e^{-x^2/2}$

Normální rozdělení $N(0,1)$

Vzhledem k uvedené motivaci se nabízí hledat vhodné spojité rozdělení, které by mělo hustotu danou nějakou obdobnou funkcí. Protože je $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ vždy kladná funkce, potřebovali bychom spočíst $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$ což není pomocí elementárních funkcí možné. Je však možné (i když ne úplně snadné) ověřit, že příslušný nevlastní integrál konverguje k hodnotě

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Odtud vyplývá, že hustota rozdělení náhodné veličiny může být

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Rozdělení s touto hustotou se nazývá **normální rozdělení** $\mathrm{N}(0,1)$.

Normální rozdělení $N(0,1)$

Příslušnou distribuční funkci

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, přesto se s ní numericky běžně počítá (pomocí tabulek nebo softwarových aplikací).
Hustotě f_X se také často říká **Gaussova křivka**.
Abychom uměli přesněji zformulovat asymptotickou blízkost normálního a binomického rozdělení pro $n \to \infty$, musíme si vytvořit další nástroje pro práci s náhodnými veličinami. Budeme k tomu používat funkce dvojím různým způsobem.

Transformace – úvodní příklady k procvičení

Příklad

Nechť má X binomické rozdělení s parametry $n = 4, p = 2/3$. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny $Y = (X-2)^2$ a nakreslete graf její distribuční funkce.

Příklad

Mějme náhodnou veličinu X hustoty $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pro $x > 0$ (a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$.

Transformace náhodných veličin

Příklad

Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, r\rangle$. Určete distribuční funkci a hustotu pravděpodobnosti rozdělení objemu koule o poloměru X.

Řešení

Určeme nejprve distribuční funkci F (pro $0 < d < \frac{4}{3}\pi r^3$)

$$F(d) = P\left[\frac{4}{3}\pi X^3 \leq d\right] = P\left[X \leq \sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}\right] = \frac{\sqrt[3]{\frac{3d}{4\pi}}}{r},$$

celkem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi r^3}}\, x^{\frac{1}{3}} & \text{pro} \quad 0 < x < \frac{4}{3}\pi r^3 \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq \frac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$$

Příklad (rozdělení $\chi^2(1)$)

Nechť Z má normované normální rozdělení. Určete hustotu transformované náhodné veličiny $X = Z^2$.

Řešení

Zřejmě je pro $x \leq 0$ distribuční funkce nulová, pro $x > 0$ dostáváme: $F_X(x) = P[Z^2 < x] = P[-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x}] =$

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \, \mathrm{d}z = 2 \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t$$

a derivací podle x dostaneme hustotu $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
Rozdělení náhodné veličiny s touto hustotou se nazývá (Pearsonovo) χ^2 rozdělení s jedním stupněm volnosti a značí se $X \sim \chi^2(1)$.

Místo náhodné veličiny X, např. „roční plat zaměstnance“, budeme vyčíslovat jinou závislou hodnotu $\psi(X)$, např. „roční čistý příjem zaměstnance po zdanění a včetně sociálních dávek“.
V systému se značnou sociální solidaritou je první veličina hodně variabilní, zatímco druhá může být skoro konstantní. Statisticky se proto budou značně odlišovat.
Připomeňme si přechod od binomického k Poissonovu rozdělení:

Věta (Poissonova)

Je-li $X_n \sim \mathrm{Bi}(n, p_n)$ *taková, že* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ *a* $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty} P[X_n = k] = P[X = k]$$

pro $k = 0, 1, \ldots$.

Nejjednodušší funkcí, po konstantách, je afinní závislost $\psi(x) = a + bx$.
V případě afinní transformace diskrétní náhodné veličiny $x = \frac{1}{a}(y - b)$ je proto pravděpodobnostní funkce nenulová právě v bodech $y_i = ax_i + b$. Ukážeme si, že v případě rozdělení X_n typu $\mathrm{Bi}(n, p)$ převádí transformace $x = y\sqrt{np(1-p)} + np$ náhodnou veličinu X_n na rozdělení Y_n s distribuční funkcí blízkou distribuční funkci spojitého rozdělení $N(0, 1)$.
Dříve uvedená Poissonova věta popisuje asymptotické chování binomického rozdělení pří $n \to \infty$ a $p \to 0$, následující věta pak chování v případě konstantní pravděpodobnosti zdaru p.

Věta (de Moivre-Laplaceova)

Pro náhodné veličiny X_n s rozdělením $\mathrm{Bi}(n, p)$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left[a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right] = \Phi(b) - \Phi(a),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Příklad

Hodíme kostkou celkem 12 000 krát. Určete pravděpodobnost toho, že počet hozených šestek je mezi 1 800 a 2 100.

Řešení

Přesná pravděpodobnost je dána výrazem $\sum_{k=1800}^{2100}\binom{12000}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$, což je obtížně vyčíslitelné.
Využijeme tvrzení Moivre-Laplaceovy věty, přepsaného do tvaru

$$P\left[A < X_n < B\right] - \left(\Phi\left(\frac{B-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right) \to 0$$

pro $n \to 0$.

Řešení (pokr.)

Volbou $p = 1/6, A = 1800, B = 2100, n = 12000$ dostáváme odhad

$$P \approx \Phi\left(\frac{2100 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800 - 2000}{\sqrt{12000 \cdot \frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) =$$
$$= \Phi(\sqrt{6}) - \Phi(-2\sqrt{6}) \approx 0,992.$$

Poznámka

Statistické tabulky – viz např. `https://is.muni.cz/auth/el/1433/podzim2014/MB103/um/StatTab.pdf` nebo sbírka příkladů [BMO].

Příklad

Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi tisíci novorozenci bude alespoň tolik děvčat jako chlapců?

Příklad

Nezávisle opakujeme pokus s výsledky 1 a 0, které mají **neznámé** pravděpodobnosti p a $1-p$. Parametr p chceme odhadnout pomocí *relativních četností* X_n/n (X_n je počet jedniček při n pokusech). Víme, že je $X_n \sim \mathrm{Bi}(n,p)$, proto nám Moivre-Laplaceova věta umožní určit počet pokusů n potřebný k zajištění požadované přesnosti odhadu δ se spolehlivostí $1-\beta$.

Řešení

Využijeme Moivre-Laplaceovu větu zapsanou ve tvaru

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left| P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \delta\right] - \left(\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\right)\right|$$

Řešení

Hledáme nejmenší n, splňující nerovnost $P[|X_n/n - p| < \delta] \geq 1 - \beta$, kterou můžeme podle věty aproximovat nerovností

$$\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - 1 \geq 1 - \beta.$$

Ta je ekvivalentní s podmínkou $n\delta/\sqrt{np(1-p)} \geq z(\beta/2)$, kde $z(p)$ je řešení rovnice $\Phi(z(p)) = 1 - p$ (tzv. *kritická hodnota* normovaného normálního rozdělení). Pro $\delta = 0{,}05$ a $1 - \beta = 0{,}9$ máme z tabulek $z(\beta/2) \approx 1{,}645$ a s využitím zřejmého odhadu $p(1-p) \leq 1/4$ dostáváme $n \geq (z(\beta/2)/2\delta)^2 \approx 270{,}6$.

Příklady k procvičení

Příklad

Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,1. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 99% alespoň 60 bezvadných konzerv. (Předpokládejte, že konzervy jsou vydávány náhodně).

Střední hodnota

Při statistickém zkoumání hodnot náhodných veličin (např. zpracování výsledků nějakého měření) hledáme výpovědi o náhodné veličině pomocí různých z ní odvozených čísel.
Jako nejjednodušší příklad může sloužit **střední hodnota**[1] $E(X)$ náhodné veličiny X, která je definována

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot f_X(x_i) & \text{pro diskrétní veličinu} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro spojitou veličinu.} \end{cases}$$

Obecně střední hodnota náhodných veličin nemusí existovat, protože příslušné sumy či integrály nemusí konvergovat.

[1] Často se místo $E(X)$ píše EX.

Střední hodnota transformované náhodné veličiny

Střední hodnotu můžeme přímo vyjádřit také pro funkce $Y = \psi(X)$ náhodné veličiny X. V diskrétním případě můžeme přímo spočíst

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_j y_j P(Y = y_j) \\
&= \sum_j y_j \sum_{\psi(x_i)=y_j} P(X = x_i) \\
&= \sum_i \psi(x_i) P(X = x_i) = \sum_i \psi(x_i) f_X(x_i).
\end{aligned}
$$

Je tedy $E(\psi(X))$ přímo spočítatelná pomocí pravděpodobnostní funkce f_X.
Podobně vyjadřujeme střední hodnotu funkce ze spojité náhodné veličiny:

$$E(\psi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud tento integrál absolutně konverguje.

Příklad

Spočtěme střední hodnotu binomického rozdělení.

Řešení

Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$ je

$$
\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = \\
= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} p^{j} (1-p)^{n-1-j} = \\
= np(p + (1-p))^{n-1} = np.
\end{aligned}
$$

Základní vlastnosti střední hodnoty

Věta

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ *a* X, Y *jsou náhodné veličiny s existující střední hodnotou. Pak*

- $E(a) = a$,
- $E(a + bX) = a + bE(X)$,
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
- *jsou-li* X *a* Y **nezávislé**, *pak* $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

Důkazy těchto tvrzení jsou přímočaré, zkuste si je udělat!
Analogická tvrzení platí i pro náhodné vektory.

Příklad

Spočtěme ještě jednou střední hodnotu binomického rozdělení, tentokrát s využitím vlastností střední hodnoty.

Řešení

Vyjádříme počet zdarů v n pokusech jako počet zdarů v jednotlivých pokusech

$$X = \sum_{k=1}^{n} Y_i,$$

přičemž náhodné veličiny Y_k mají všechny alternativní rozdělení $A(p)$. Snadno spočítáme $E(Y_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Dále víme, že střední hodnota součtu je součtem středních hodnot, proto

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = np.$$

Kvantily

Dalšími užitečnými charakteristikami jsou tzv. **kvantily**. Pro ryze monotónní distribuční funkci F_X (tj. spojitou náhodnou veličinu X s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde prostě o inverzní funkci $F_X^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$. To znamená, že hodnota $y = F^{-1}(\alpha)$ je taková, že $P(X < y) = \alpha$. Obecněji, je-li $F_X(x)$ distribuční funkce náhodné veličiny X, pak definujeme **kvantilovou funkci**[2]

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq \alpha\},\ \ \alpha \in (0, 1).$$

Zřejmě jde o zobecnění předchozí definice.
Nejčastěji jsou používané kvantily s $\alpha = 0.5$, tzv. **medián**, s $\alpha = 0.25$, tzv. **první kvartil**, $\alpha = 0.75$, tzv. **třetí kvartil**, a podobně pro **decily** a **percentily** (kdy je α rovno násobkům desetin a setin). K těmto hodnotám se vrátíme v popisné statistice později.

[2] Uvědomte si, že jsme se již s kvantily setkali, jen jsme jím tak zatím neříkali.

Rozptyl a směrodatná odchylka

Tyto číselné charakteristiky rozdělení náhodné veličiny nepopisují nějakou střední či typickou hodnotu (jako střední hodnota či medián), ale míru „kolísání“ náhodné veličiny kolem střední hodnoty.

Rozptylem (variancí) náhodné veličiny X, která má konečnou střední hodnotu, nazýváme číslo

$$D(X) = \operatorname{var} X = E([X - E(X)]^2),$$

odmocnina z rozptylu $\sqrt{D(x)}$ se pak nazývá **směrodatná odchylka**.

Základní vlastnosti rozptylu

Věta

Pro náhodnou veličinu X *a reálná čísla* a, b *platí:*

1. $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$,
2. $D(a + bX) = b^2 D(X)$,
3. $\sqrt{D(a + bX)} = |b|\sqrt{D(X)}$.

Důkaz.

Důkaz je přímočarý. Poznamenejme, že tvrzení 1 se často používá k výpočtům $D(X)$. □

Kovariance

O závislosti dvou náhodných veličin do jisté míry vypovídá tzv. **kovariance**, definovaná předpisem

$$C(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

Veličinám X, Y, pro něž je $C(X, Y) = 0$, říkáme **nekorelované** .

Věta

Pro náhodné veličiny s existujícími rozptyly platí:

1. $C(X, Y) = C(Y, X)$,
2. $C(X, X) = D(X)$,
3. $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,
4. $C(a + bX, c + dY) = bd \cdot C(X, Y)$,
5. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2C(X, Y)$, *speciálně, jsou-li* X, Y *nezávislé, je* $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, *tj.* $C(X, Y) = 0$ *a* X, Y *jsou nekorelované.*

Koeficient korelace

Koeficient korelace je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right).$$

Věta

1. $R(X, X) = 1$,
2. $R(a + bX, c + dY) = \mathrm{sgn}(bd)R(X, Y)$,
3. *jsou-li* X, Y *nezávislé, je* $R(X, Y) = 0$,
4. *(Cauchyova nerovnost)* $|R(X, Y)| \leq 1$.

Příklad

Spočtěme rozptyl binomického rozdělení.

Řešení

Stejně jako dříve lze psát $X = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, kde $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny vyjadřující úspěch v k-tém pokusu. Snadno vypočteme $E(Y_k^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$, proto $D(Y_k) = E(Y_k^2) - E(Y_k)^2 = p - p^2 = p(1-p)$. Protože pro **nezávislé** Y_k platí $D(\sum Y_k) = \sum D(Y_k)$, je $D(X) = np(1-p)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } x = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete $E(X), E(2X+5), E(X^2), D(X)$ a $D(2X+1)$.

Příklad

Nekorelované náhodné veličiny X a Y mají rozptyly $D(X) = a$ a $D(Y) = 2$. Určete konstantu a, jestliže rozptyl náhodné veličiny $Z = 3Y - X$ je $D(Z) = 25$.

Normovaná náhodná veličina a limitní věty

Všimněme si, že výraz $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ vystupující v Moivre-Laplaceově větě je totéž, co $\frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{D(x)}}$ a jde tedy o tzv. **normovanou** náhodnou veličinu (tj. veličinu lineárně transformovanou tak, aby měla střední hodnotu 0 a rozptyl 1). Moivre-Laplaceova věta pak říká, že pro $n \to \infty$ se rozložení této náhodné veličiny blíží normovanému normálnímu rozdělení $N(0, 1)$.

Jde o speciální případ limitních vět, ukazujících, že za určitých podmínek platí „zákony velkých čísel“, kdy se obdobným způsobem transformované náhodné veličiny chovají jako normální rozdělení.

Další momenty

Někdy je užitečné studovat řadu dalších charakteristik rozdělení náhodných veličin. Za rozumných předpokladů jsou definovány *k*-**té obecné momenty**

$$\mu'_k = E(X^k)$$

a *k*-**té centrální momenty**

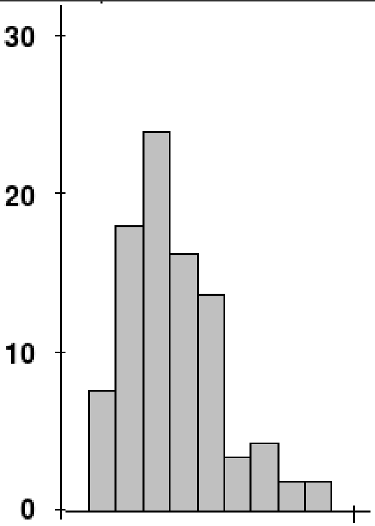
$$\mu_k = E([X - E(X)]^k).$$

Pomocí momentů pak definujeme např. **šikmost** (asymetrii) náhodné veličiny X jako

$$\frac{\mu_3}{\sqrt{D(x)}^3}$$

nebo **špičatost** (exces) jako

$$\frac{\mu_4}{D(x)^2} - 3.$$



Kladná šikmost distribuce (více vysokých kladných hodnot než odpovídá normálnímu rozdělení s nulovou šikmostí).

Momentová vytvořující funkce

Definice

Reálnou funkci proměnné $t \in \mathbb{R}$ $M_X(t) = E(e^{tX})$ nazveme **momentovou vytvořující funkcí** náhodné veličiny X.

Poznámka

Je-li X např. spojitá, platí

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \cdots) f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= 1 + t\mu_1' + \frac{t^2\mu_2'}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

a jde vlastně o *exponenciální vytvořující funkci* posloupnosti k-tých obecných momentů μ_k'.

Věta

Pro momentovou vytvořující funkci platí:

- $\mu'_k = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} M_X(t) \mid_{t=0}$.
- *Platí-li* $M_X(t) = M_Y(t)$ *pro všechna* $t \in \langle -b, b \rangle$, *mají náhodné veličiny stejné rozdělení, tj.* $F_X(x) = F_Y(x)$.
- $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$.
- *Jsou-li* X, Y *nezávislé, je* $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

Příklad

Určete momentovou vytvořující funkci binomického rozdělení.

Řešení

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= (pe^t + (1-p))^n = (p(e^t - 1) + 1)^n.$$

Snáze jsme mohli funkci určit s využitím předchozích vět a momentové vytvořující funkce alternativního rozdělení, neboť pro $Y \sim A(p)$ je $E(e^{tY}) = e^{t\cdot 1} \cdot p + e^{t\cdot 0}(1-p) = p(e^t - 1) + 1$.

Příklad

Naposled spočtěme střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení, tentokrát s využitím vytvořující funkce.

Řešení

$M(t) = (p(e^t - 1) + 1)^n$, proto je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M(t) = n(p(e^t - 1) + 1)^{n-1} e^t p,$$

což pro $t = 0$ dá $E(X) = \mu_1' = np$.
Podobně spočítáme i $D(x) = \mu_2' - (\mu_1')^2$.

Momenty normálního rozdělení

Přímý výpočet střední hodnoty a rozptylu normovaného normálního rozdělení není triviální. S využitím momentové vytvořující funkce je ale poměrně jednoduchý.

Nechť $Z \sim N(0,1)$. Pak

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \mathrm{d}z = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2 - 2tz + t^2 - t^2}{2}\right) \mathrm{d}z = \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-t)^2}{2}\right) \mathrm{d}z = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Poslední integrál je roven 1 díky tomu, že na místě integrované funkce je funkce s vlastnostmi hustoty.

Střední hodnota a rozptyl normálního rozdělení

S využitím předchozího výpočtu $M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ snadno spočítáme, že

$$M'_Z(t) = t\exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$
$$M''_Z(t) = t^2\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Dosazením $t = 0$ pak dostaneme

$$E(Z) = 0, D(Z) = 1.$$

Pro transformovanou náhodnou veličinu $Y = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ pak snadno odvodíme z vlastností střední hodnoty, resp. rozptylu, že $E(Y) = \mu, D(Y) = \sigma^2$ (což zpětně zdůvodňuje zápis $N(\mu, \sigma^2)$). Momentová vytvořující funkce má tvar $M_Y(t) = \exp\left(\mu t + \sigma^2\frac{t^2}{2}\right)$.

Příklad

Určete rozdělení součtu nezávislých náhodných veličin
$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Řešení

Z vlastností momentové vytvořující funkce dostáváme

$$M_{X+Y}(t) = \exp\bigl(\mu_X t + \sigma_X^2 \frac{t^2}{2}\bigr) \exp\bigl(\mu_Y t + \sigma_Y^2 \frac{t^2}{2}\bigr) =$$
$$= \exp\bigl((\mu_X + \mu_Y)t + (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\frac{t^2}{2}\bigr).$$

Proto $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Příklady k procvičení

Příklad

Náhodná veličina X má na intervalu $(0, a)$ konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:

1. $E(2X + 3)$,
2. $E(3X^2 - 2X + 1)$,
3. $D(2X + 3)$,
4. $D(X^2 + 1)$,

Příklad

Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení (tj. pravděpodobnostní funkci $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$). Určete její (momentovou vytvořující funkci), střední hodnotu a rozptyl.